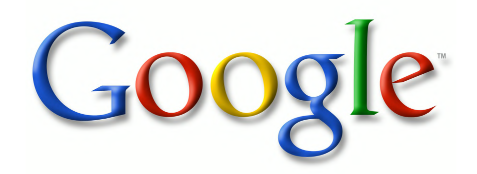




LEHRBUCH DER ELEMENTAR-GEOMETRIE

III. TEIL • 2. AUFLAGE



P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen,** der **Technischen** und **Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, dafs bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes
auch me … n in Wissen-
schaft u … **erbieten** ge-
diegener … eshalb, wenn
auch sc … egenstand in
meinem …

Un … nz besonders
auf die … nd Wien und
der Ges … ne **Encyklo-**
pädie d … in 7 Bänden
die Arit … ie Mechanik,
die Phy … ehandelt und
in einen … ische Fragen
besprech … n wird.

We … und natur-
wissensc … Die **Mathe-**
matisch … **Archiv der**
Mathem … **chen Mathe-**
matiker … **und Physik**
und die … **schaftlichen**
Unterri …

Sei … **Mitteilungen**
der Ver … ngen", welche
unentgel … im Auslande
von mi … inem Verlage
Aufmerk … e befindlichen
und vor … n Verlags in
Kenntni … t fortgeführte
jährlich … **Verlags von**
B. G. T … **technischen**
und Na … gabe [XL u. 168 S. gr. 8], in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststrafse 3. **B. G. Teubner.**

Erler, Dr. **W.,** weil. Professor am Kgl. Pädagogium Züllichau, die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zum Gebrauche in der Prima höherer Lehranstalten. Fünfte Auflage besorgt von Dr. L. Huebner, Professor am Gymnasium zu Schweidnitz. Mit 30 Figuren im Text. [VI u. 60 S.] gr. 8. 1898. kart. ℳ 1.20.

Fuhrmann, W., Oberlehrer an der Realschule auf der Burg in Königsberg/Ostpr., Wegweiser in der Arithmetik, Algebra und niederen Analysis, bestehend in einer geordneten Sammlung von Begriffen, Formeln und Lehrsätzen in diesen Disziplinen. [63 S.] gr. 8. 1886. kart. ℳ 1.—

Ganter, Dr. **H.,** Professor an der Kantonschule in Aarau, und Dr. **F. Rudio,** Professor am Polytechnikum in Zürich, die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. I. Teil: Die analytische Geometrie der Ebene. Mit 54 Figuren im Text. 4. verb. Aufl. [VIII u. 180 S.] gr. 8. 1900. geb. ℳ 3.—

Siehe auch: Rudio, Elemente der analytischen Geometrie des Raumes.

Girndt, Martin, Königl. Baugewerkschul-Lehrer, Raumlehre für Baugewerkschulen und verwandte gewerbliche Lehranstalten. 2 Teile. gr. 8. 1897. kart. ℳ 3.40.

I. Teil. Lehre von den ebenen Figuren. Mit 276 Fig. im Text u. 287 der Baupraxis entlehnten Aufgaben. [VIII u. 99 S.] In Lnw. kart. ℳ 2.40.
II. — Körperlehre. Mit 64 Textfiguren. [VIII u. 55 S.] kart. ℳ 1.—

Henrici, Julius, Gymnasial-Professor in Heidelberg, u. **P. Treutlein,** Professor am Gymnasium zu Karlsruhe, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 3 Teile. gr. 8. geh. ℳ 7.60.

I. Teil. Gleichheit der Gebilde in einer Ebene. Abbild. ohne Maßänderung. Mit 193 Fig. in Holzschn. 3. Aufl. [VIII u. 144 S.] 1897. ℳ 2.—
II. — Abbildung in verändertem Maße. Berechnung der Größen der ebenen Geometrie. Mit 188 Figuren in Holzschnitt und einem (lithogr.) Kärtchen. 2. Auflage. [IX u. 248 S.] 1896. ℳ 2.80.
III. — Lage und Größe der stereometrischen Gebilde. Abbildungen der Figuren einer Ebene auf eine zweite (Kegelschnitte). Pensum für Prima. Mit 134 Fig. in Zinkographie. [VIII u. 194 S.] 1883. ℳ 2.80.

Hochheim, Dr. **Adolf,** Professor, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft I. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. 2. verb. Aufl. 2 Teile. gr. 8. 1894. geh. ℳ 3.20. A. Aufgaben. [IV u. 86 S.] ℳ 1.60. B. Auflösungen. [106 S.] ℳ 1.60.

—— —— Heft II. Die Kegelschnitte. Abteilung I. 2. Aufl. 2 Teile. gr. 8. 1898. geh. ℳ 3.—. A. Aufgaben. [IV u. 81 S.] ℳ 1.40. B. Auflösungen. [96 S.] ℳ 1.60.

—— —— Heft III. Die Kegelschnitte. Abteilung II. 2 Teile. gr. 8. 1886. geh. ℳ 2.80. A. Aufgaben. [67 S.] ℳ 1.20. B. Auflösungen [94 S.] ℳ 1.60.

Holzmüller, Prof. Dr. **Gustav,** Dir. der Gewerbeschule (Realschule mit Fachklassen) zu Hagen i. W., Mitglied der Kais. Leop. Carol. Akademie der Naturforscher, methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. (Im engsten Anschluß an die Neuen Lehrpläne.) gr. 8. In Lnw. geb.

Allgemeine Ausgabe A. In 3 Teilen. gr. 8. In Lnw. geb.

I. Teil, nach Jahrgängen geordnet und bis zur Abschlußprüfung der Vollanstalten reichend. 3. Doppel-Auflage. Mit 142 Figuren im Text. [VIII u. 239 S.] 1898. ℳ 2.40.
II. — für die drei Oberklassen der höheren Lehranstalten bestimmt. 2. Auflage. Mit 210 Figuren im Text [VIII u. 292 S.] 1897. ℳ 3.—
III. — Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitungen auf die Hochschul-Mathematik. Mit 160 Figuren im Text. [VIII u. 224 S.] 1895. ℳ 2.80.

Ausgabe B, für Gymnasien. In 2 Teilen. gr. 8. In Lnw. geb.

I. Teil, im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1892 nach Jahrgängen geordnet und bis zur Abschlußprüfung der Untersekunda reichend. Mit 138 Figuren im Text. [VIII u. 228 S.] 1896. ℳ 2.40.
II. — im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1892 nach Jahrgängen geordnet und bis zur Entlassungsprüfung reichend. Mit 196 Figuren im Text. [VIII u. 279 S.] 1896. ℳ 3.—

Begleitwort des Verfassers hierzu, nur für Lehrer bestimmt, liefert die Verlagsbuchhandlung auf Wunsch unentgeltlich.

Müller, H., Oberlehrer am Kaiserin Augusta-Gymnasium zu Charlottenburg, und **M. Kutnewsky,** Oberlehrer an der XII. Realschule in Berlin, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen zusammengestellt. **Ausgabe A** für die Mittelklassen der Reformschulen, Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. Teil I. [VIII u. 316 S.] gr. 8. 1900. In Leinw. geb. n. ℳ 2.80.

——— ——— **Ausgabe B** für Realschulen. [VIII u. 289 S.] gr. 8. 1900. In Leinw. geb. n. ℳ 2.60.

Prix, Ernst, Oberlehrer an der Königl. Realschule I. O. zu Annaberg, Elemente der darstellenden Geometrie. 2 Teile. gr. 8. geh. ℳ 3.20.

I. Teil. Darstellung von Raumgebilden durch orthogonale Projektionen. Mit in den Text gedruckten Figuren. [VII u. 72 S.] 1883. ℳ 1.20.

II. — Schnitte von ebenen und krummen Flächen. Schiefwinklige und axonometrische Projektionen. Centralprojektion. Mit in den Text gedruckten Figuren. [IV u. 120 S.] 1883. ℳ 2.—

Reidt, Dr. Friedrich, Professor am Gymnasium und dem Realgymnasium zu Hamm, Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. 2 Teile. gr. 8. geh. ℳ 7.—

I. Teil. Trigonometrie. 4., verb. Aufl. [X u. 250 S.] 1894. ℳ 4.—

II. — Stereometrie. 4., verb. Aufl. bearb. v. A. Much. [VIII u. 194 S.] 1897. ℳ 3.—

——— Resultate der Rechnungsaufgaben in der Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. 2 Teile. gr. 8. geh. ℳ 2.80.

I. Teil. Trigonometrie. 4. Aufl. [88 S.] 1894. ℳ 1.80.

II. — Stereometrie. 4. Aufl. bearb. v. A. Much. [58 S.] 1897. ℳ 1.—

——— die trigonometrische Analysis planimetrischer Konstruktions-Aufgaben. [VIII u. 50 S.] gr. 8. 1882. kart. ℳ 1.20.

Rudio, Dr. F., Professor am Polytechnikum in Zürich, die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten, sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Mit 12 in den Text gedruckten Figuren. 2. Auflage. [X u. 184 S.] gr. 8. 1899. geb. ℳ 3.—

——— u. Ganter, analytische Geometrie der Ebene, siehe: Ganter u. Rudio.

Särchinger, E., und Dr. **V. Estel,** Oberlehrer am Kgl. Gymnasium zu Chemnitz, Aufgabensammlung für den Rechen-Unterricht in den Unterklassen der Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen. 2. verbesserte Auflage. 3 Hefte. gr. 8. 1899. kart.

I. Heft. Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen einfach und mehrfach benannten Zahlen. [IV u. 91 S.] ℳ 1.—

II. — Bruchrechnung. [104 S.] ℳ 1.20.

III. — Schlußrechnung. Prozent-, Zins- und Diskontorechnung. [70 S.] ℳ —.80.

(Resultate hierzu nur durch die Verlagsbuchhandlung.)

Schilke, Dr. phil. E., Oberlehrer am Gymnasium zu Saarburg i./L., Sammlung planimetrischer Aufgaben für den Gebrauch an höheren Schulen. [IV u. 54 S.] gr. 8. 1890. kart. ℳ 1.—

Schotten, Dr. Heinrich, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. In 3 Bänden. I. Band. [IV u. 370 S.] gr. 8. 1890. geh. ℳ 6.—

——— ——— II. Band. [IV u. 410 S.] gr. 8. 1893. geh. ℳ 8.—

Schubert, Dr. Hermann, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg, fünfstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen. [VI u. 157 S.] gr. 8. 1897. In Leinwand geb. ℳ 4.—

Schülke, Dr. **A.**, vierstellige Logarithmentafeln nebst mathematischen, physikalischen und astronomischen Tafeln. Für den Schulgebrauch zusammengestellt. Dritte verbesserte Auflage. [II u. 18 S.] gr. 8. 1900. Steif geh. M —.60.

——— trigonometrische Tafel. 2. Aufl. [1 Bl.] gr. 8. 1896. M —.15.

Schüller, Werner Jos., Seminarlehrer in Boppard am Rhein, ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für höhere Schulen und Lehrerseminare, besonders zum Selbstunterricht. In engster Verknüpfung mit der Geometrie zur Versinnlichung der Zahlbegriffe, Theorien, Operationen, Lehrsätze und Auflösung von Aufgaben systematisch bearbeitet. Mit 54 Figuren im Text. Zweite, um die Logarithmen vermehrte, wohlfeile Ausgabe. [XXVI u. 478 S.] gr. 8. 1897. Dauerhaft geb. M 2.50.

Schulze, Dr. **Karl**, Lehrer an der Bieberschen Realschule in Hamburg, Leitfaden für den trigonometrischen und stereometrischen Unterricht an höheren Bürger- u. Realschulen. Mit Figuren im Text. 2 Hefte. gr. 8. 1890. kart. je M 1.20.

I. Heft. Trigonometrie. [VIII u. 72 S.]
II. — Stereometrie. [IV u. 60 S.]

Schuster, Prof. Dr. **M.**, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Oldenburg, geometrische Aufgaben. Ein Lehr- und Übungsbuch zum Gebrauch beim Unterricht an höheren Schulen. gr. 8.

Ausgabe A: für Vollanstalten. [VIII u. 147 S.] Mit 2 lithograph. Tafeln. 1899. In Leinwand geb. M 2.—

Ausgabe B: für Progymnasien und Realschulen. [VII u. 111 S.] Mit 2 lithogr. Tafeln. 1899. In Leinwand geb. M 1.60.

Servus, Dr. **H.**, Privatdozent an der königl. technischen Hochschule zu Charlottenburg und ord. Lehrer an der V. städtischen höheren Bürgerschule zu Berlin, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra für Gymnasien, Realgymnasien und höhere Bürgerschulen. 4 Hefte. gr. 8. kart. M 2.70.

I. Heft. Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division. [IV u. 47 S.] 1888. M —.60.
II. — Quadrierung und Kubierung von Summen, Zerlegung in Faktoren, Heben der Brüche, Proportionen, der größte gemeinschaftliche Faktor, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, Addition und Subtraktion von Brüchen, die Quadratwurzel, die Kubikwurzel. [51 S.] 1888. M —.60.
III. — Potenzierung, Radicierung, Logarithmierung. [II u. 94 S.] 1888. M —.75.
IV. — Gleichungen ersten Grades, Anwendungen der Gleichungen ersten Grades, Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten, Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten, Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten, quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten, transscendente Gleichungen, arithmetische Reihen, geometrische Reihen, Diophantische Gleichungen. [II u. 78 S.] 1889. M —.75.

Die Hefte sind so eingeteilt, daß jedes für einen Jahreskursus ausreicht: I. für Untertertia, II. für Obertertia, III. für Untersekunda, IV. für Obersekunda.

Thieme, Dr. **H.**, ord. Lehrer am Realgymnasium zu Posen, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Stereometrie. Im Anschluſs an nachgelassene Papiere des Oberlehrers Dr. Kretschmer bearbeitet. [VI u. 92 S.] gr. 8. 1885. kart. M 1.20.

Wehner, Dr. **Hermann**, Lehrer an der städtischen Realschule zu Plauen i. V., Leitfaden für den stereometrischen Unterricht an Realschulen. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren. [VIII u. 54 S.] gr. 8. 1892. kart. M —.80.

Wolff, H., Lehrer der Mathematik an der K. Baugewerkenschule in Leipzig, Sätze und Regeln der Arithmetik und Algebra nebst Beispielen und gelösten Aufgaben. Zum Gebrauche an Baugewerkenschulen, Gewerbeschulen ꝛc. [IV u. 102 S.] gr. 8. 1888. kart. M 1.60.

LEHRBUCH

DER

ELEMENTAR-GEOMETRIE

VON

J. HENRICI UND P. TREUTLEIN

PROFESSOR AM GYMNASIUM ZU HEIDELBERG. DIREKTOR DES REALGYMNASIUMS ZU KARLSRUHE.

DRITTER TEIL.

DIE GEBILDE DES KÖRPERLICHEN RAUMES.
ABBILDUNG VON EINER EBENE AUF EINE ZWEITE.
(KEGELSCHNITTE.)

MIT 131 FIGUREN IM TEXT.

ZWEITE AUFLAGE.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

Vorwort.

Mit der Neubearbeitung dieses dritten Teiles der Geometrie hat nun das Ganze die Verbesserung in praktischer Richtung gewonnen, die sich aus einem mehr als zehnjährigen Gebrauch in der Schule von selbst ergab. Was das Buch von Poncelets klassischem Werk zum ersten Male in die Schule einführte, ist nun ein gesicherter Bestandteil des Unterrichts geworden. Das Abbilden, ein Begriff, den die ältere Schulgeometrie nicht erwähnt, hat sich zum Leitgedanken entwickelt, nach dem sich Alles auf das natürlichste aneinander reihet und ordnet, selbst bis auf die alten Formen von Prismen und Pyramiden.

Auch die Lehre von der Symmetrie wurde mittlerweile in den Schulen in dem Maſse mehr eingebürgert, als diese aus den Werken neuester Kunstrichtung verschwand. Ist es etwa ein Naturgesetz, daſs je mehr etwas mit dem Verstand erfaſst wird, es seine Bedeutung für die freie Kunst verliert?

Die Veränderungen dieses dritten Teiles, so sehr sie selbst die Anordnung des Ganzen zu treffen scheinen, sind doch wesentlich nur Vereinfachungen, und wenn trotzdem der Umfang des Buches nicht abgenommen hat, so kommt dies einerseits daher, daſs die Klarlegung und Begründung an manchen Stellen mehr Raum in Anspruch nahm und andererseits der Übungsstoff in den Aufgaben nach der Seite sowohl des Rechnens als des Zeichnens vermehrt wurde.

Auch im Lehrgang selbst wurde mehr Gewicht auf das Zeichnen gelegt und namentlich auch auf die Erfordernisse der darstellenden Geometrie Rücksicht genommen. Doch konnte die darstellende Geometrie als solche nicht maſsgebend sein für die Anordnung, da für diese die folgerichtige Ordnung der Gebilde selbst, nicht ihre Darstellung auf der Ebene den Ausschlag geben muſs. Zu der Aufgabe, das körperlich-räumliche Vorstellungsvermögen zu entwickeln und zu kräftigen, sind ja wohl beide Lehrgegenstände in gleichem Maſse berufen.

In dem sehr abstrakten Gebiet der Lage von Punkten, Geraden und Ebenen werden sowohl an das räumliche Anschauungsvermögen,

als an die logische Urteilskraft der Schüler höhere Anforderungen gestellt; deshalb wurden gerade hier gegen die Übung theoretischer Lehrbücher der Mathematik Hinweise auf Vorkommnisse und Anwendungen im Leben eingestreut, natürlich geschieden von dem eigentlichen Text durch kleinern Druck. Dem Einen werden freilich diese Einstreuungen als Entweihung der strengen Wissenschaft erscheinen, während ein anderer darin vielleicht blofs den dürftigen Versuch sieht, die graue Theorie mit dem grünen Baum des Lebens zu vereinen.

Die Kegelschnitte werden im folgenden betrachtet als Schnittlinien von Umdrehungskegeln, als Schatten der Kugel und in allgemeinster Fassung als Bilder des Kreises oder als Bilder dieser Bilder. Der Steinerschen Entstehung dieser Linien aus projektiven Punktreihen und Strahlenbüscheln geschah schon im zweiten Teil Erwähnung, wo die Kegelschnitte als Bilder des Kreises in der Ebene der Vorlage behandelt werden. Die umfassende Behandlung der Kegelschnitte als Kreisbilder setzt in diesem dritten Teil keinen vorherigen Unterricht in neuerer Geometrie voraus.

Wir möchten hier noch darauf aufmerksam machen, dafs von Prof. Dr. Strack „Modell-Netze zu den Gebilden der Kegelschnitte“ (im Verlag von Gutsch in Karlsruhe, zum Preis von 1 M.) erschienen sind im unmittelbaren Anschlufs an den perspektiven Teil dieses Lehrbuches, eine kleine Sammlung, die in der Hand der Schüler, namentlich solcher von geringerem Vorstellungsvermögen, die besten Dienste leisten kann.

Im Anhang finden sich als Beigaben die grundlegenden Aufgaben der darstellenden Geometrie über Punkte, Geraden und Ebenen, die Zeichnung der Krystalle mittels des Axenkreuzes und der Entwurf zu Kartennetzen. Zum Schlufs ist noch die Frage beantwortet, wie der Standpunkt zu wählen ist, um ein Bild zu betrachten.

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt.

Beziehungen der Lage von Punkten, Geraden, Ebenen und Umdrehungsflächen.

Erstes Kapitel: Bestimmungen der Lage von Punkten, Geraden und Ebenen.

		Seite
§ 1.	Punkt, Gerade und Ebene	1
§ 2.	Lage von drei oder mehreren Grundgebilden	4
§ 3.	Die Drehung. Die senkrechte Lage und der Ebenenwinkel	6
§ 4.	Die Verschiebung. Winkel von parallelen Geraden und Ebenen	9
§ 5.	Abstand zwischen Punkt und Ebene; Winkel zwischen Gerade und Ebene. Grundrifs	10

Zweites Kapitel: Gegengesetzte Lage in Bezug auf Punkt, Gerade oder Ebene. Die Umdrehungsflächen.

A. Gebilde mit einem Mittelpunkt.

§ 6.	Gegengesetzte Lage zu einem Punkt	14
§ 7.	Die Kugel als Fläche mit einem Mittelpunkt	16

B. Gebilde mit einer Mittellinie.

§ 8.	Gegengesetzte Lage zu einer Geraden	19
§ 9.	Cylinder, Kegel und Kugel als Flächen mit einer Mittellinie	20
§ 10.	Kegelschnitte im Umdrehungskegel	23

C. Gebilde mit einer Mittelebene.

§ 11.	Beiderseits gleiche Lage zu einer Ebene	29
§ 12.	Beziehungen zwischen den Gebilden gegengesetzter Lage zu Punkt, Gerade oder Ebene	31

Drittes Kapitel: Beziehungen der Kanten- und Ebenenwinkel im Dreikant und Kugeldreieck.

§ 13.	Winkel im Dreikant und n kant	32
§ 14.	Deckungsfähigkeit der Dreikante und Kugeldreiecke	34
§ 15.	Bestimmung der Lage von Punkten zu einem rechtwinkeligen Dreikant. Raumkoordinaten	36
§ 16.	Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln im Kugeldreieck. (Sphärische Trigonometrie.)	37
§ 17.	Berechnung der Seiten und Winkel des Kugeldreiecks	40

II. Abschnitt.

Ähnliche Abbildung und körperliche Gebilde.

Viertes Kapitel: Parallelbestrahlung, Bestrahlung paralleler Ebenen von einem Punkt und die entsprechenden Körperformen.

Seite
§ 18. Abbildung durch parallele Bestrahlung 44
§ 19. Prisma und Cylinder 45
§ 20. Ähnliche Abbildung durch Bestrahlung von einem Punkt 49
§ 21. Pyramide und Kegel 51
§ 22. Kugelfläche und andere Umdrehungsflächen 55

Fünftes Kapitel: Rauminhalt der Körper.

§ 23. Gleichheit von Körperinhalten 58
§ 24. Inhalt von Prisma, Cylinder, Pyramide und Kegel 62
§ 25. Inhalt von Kugelteilen und anderen Umdrehungskörpern 65

Sechstes Kapitel: Die regelmäfsigen Körper.

§ 26. Beziehung zwischen der Zahl der Ecken, Kanten und Flächen eines beliebigen Vielflachs 67
§ 27. Das regelmäfsige Vier-, Sechs- und Achtflach 69
§ 28. Das regelmäfsige Zwölf- und Zwanzigflach 71

III. Abschnitt.

Abbildung von einer Ebene auf eine sie schneidende Ebene. Kegelschnitte.

Siebentes Kapitel: Abbildung geradliniger Figuren und Abbildung des Kreises als Kreis.

§ 29. Abbildung von Punkten und Geraden 74
§ 30. Der Fluchtpunkt einer Geraden und die Fluchtgerade einer Ebene 76
§ 31. Abbildung in der Ebene der Vorlage 78
§ 32. Vierseit und Viereck. Harmonische Teilung 80
§ 33. Abbildung des Kreises als Kreis 83
§ 34. Der Kreis mit Viereck und Vierseit, Sechseck und Sechsseit . . . 87

Achtes Kapitel: Die Kegelschnitte als Bilder des Kreises.

§ 35. Arten der Kegelschnitte 91
§ 36. Mittelpunkt, Durchmesser und zugeordnete Sehnen 93
§ 37. Bestimmung der Kegelschnitte durch Punkte und Berührende . . . 97
§ 38. Bedingungen der bestrahlten Lage zweier Kegelschnitte 100
§ 39. Axen, Brennpunkte und Leitgeraden 103

Neuntes Kapitel: Streckenverhältnisse in Abbildungen.

§ 40. Unveränderliche Produkte aus Strecken bei Abbildungen 111
§ 41. Gleichungen der Kegelschnitte 114
Anmerkung aus der Bewegungslehre 119

Anhang.

Zehntes Kapitel: Von der Abbildung von Gestalten des körperlichen Raumes auf der Ebene.

		Seite
§ 42.	Grund- und Aufrifs von Punkten, Geraden und Ebenen	121
§ 43.	Abbildung in Bezug auf ein Axenkreuz	125
§ 44.	Abbildung der Kugeloberfläche (Kartennetze)	128
§ 45.	Bestimmung des Gesichtspunktes zu einem Bild von baulichen Gegenständen	131

Übungsaufgaben.

I.	Aufgaben zum ersten Kapitel	137
II.	Aufgaben zum zweiten Kapitel	141
III.	Aufgaben zum dritten Kapitel	146
IV.	Aufgaben zur Parallelbestrahlung, zu Prismen und Cylindern	149
V.	Aufgaben zur körperlichen Ähnlichkeit	154
VI.	Aufgaben zu Pyramiden und Kegeln	157
VII.	Aufgaben zur Fläche der Kugel und ihrer Teile	162
VIII.	Aufgaben zum Inhalt von Prismen und Cylindern	165
IX.	Aufgaben zum Inhalt von Pyramiden und Kegeln	168
X.	Aufgaben zum Inhalt von Pyramiden- und Kegelstumpf und schief abgeschnittener Säule	169
XI.	Aufgaben zum Inhalt der Kugel und Kugelteile	172
XII.	Aufgaben zur Abbildung geradliniger Figuren	175
XIII.	Aufgaben zur Abbildung des Kreises als Kreis	178
XIV.	Aufgaben über Punkte, berührende und schneidende Geraden der Kegelschnitte	179
XV.	Aufgaben über Bestrahlung der Kegelschnitte in einer Ebene	183
XVI.	Aufgaben über Axen, Brennpunkte und Leitgeraden	184
XVII.	Aufgaben über Gleichungen der Kegelschnitte	188

Druckfehler.

S. 76, Zeile 17 v. o. lies: S. 4, 3d statt: S. 4, 30.

S. 79, Zeile 10/11 v. o. lies: Gerade g_3 als Bild der Geraden g statt: Gerade a_1 als Bild der Geraden a.

I. Abschnitt.

Beziehungen der Lage von Punkten, Geraden, Ebenen und Umdrehungsflächen.

Erstes Kapitel.

Bestimmungen der Lage von Punkten, Geraden und Ebenen.

§ 1. Punkt, Gerade und Ebene.

1. Von den seither betrachteten Figuren einer einzigen Ebene wenden wir uns nun zu den Gebilden des körperlichen Raumes. Hier ist zunächst festzustellen, wodurch die Lage einer Ebene im Raum bestimmt wird (vgl. I. Teil § 4).

Eine Ebene ist die Fläche, die durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte eindeutig bestimmt ist.

Wird eine durch drei Punkte bestimmte Ebene aus dieser Lage durch Verschieben, Drehen oder Umwenden (I §§ 21, 22, 15) in eine andere Lage gebracht, bei der drei andere ihrer Punkte auf jene Punkte fallen, so enthält die Ebene wieder die gleichen Punkte des Raumes wie in der ursprünglichen Lage.

2. Da dasselbe auch für eine Gerade in Bezug auf zwei Punkte gilt, so folgt:

Eine Gerade durch zwei Punkte einer Ebene fällt mit allen ihren Punkten in die Ebene.

Prüfung einer Ebene (Reifsbrett) durch ein Lineal.

3. Hiernach *kann die Lage einer Ebene* statt durch drei Punkte auch *bestimmt werden:* a) *durch eine Gerade und einen Punkt aufser ihr,* b) *durch zwei sich schneidende Geraden,* c) *durch zwei parallele Geraden.*

Die Ebene wird im Falle a) erzeugt durch eine Gerade (Erzeugende), die sich um den Punkt dreht und auf der Geraden hingleitet (I § 3, 3), im Falle b) und c) durch eine Gerade, die in allen möglichen Weisen auf beiden Geraden zugleich hingleitet. Der Fall c) ist dem Fall b) einzureihen, da die parallele Lage nur die Grenz-

lage ist, der die Schneidende (Erzeugende) bei der Drehung um den Punkt unbeschränkt nahe kommt, wenn der Schnittpunkt unbeschränkt weit hinaus rückt.

Bezeichnen wir die Geraden durch die Buchstaben a und b, so kann ihre Ebene mit ab bezeichnet werden.

Die durch einen Strahlpunkt gehenden oder die parallelen Lichtstrahlen, die längs einer Geraden hingleiten, bilden eine Strahlenebene.

4. Hieraus folgt weiter:

a) *Zwei Geraden einer Ebene schneiden einander, oder sie sind parallel.*

Zwei Geraden, die weder einander schneiden noch parallel sind, heifsen windschiefe oder kreuzende Geraden.

b) *Durch zwei windschiefe Gerade kann keine Ebene gelegt werden.*

5. a) Wie eine Ebene durch eine Gerade in zwei Halbebenen (in eine Halbebene und ihre Gegenhalbebene) zerlegt wird, so trennt eine Ebene den Raum in zwei Teile, die als die eine und die andere Seite von der Ebene aus benannt werden.

b) *Wenn von einer Geraden XA_1 ein Punkt X in einer Ebene β liegt, ein anderer Punkt A_1 aufserhalb β, so trifft die Gerade die Ebene nur in dem einen Punkt, ihrem Spurpunkt* (vgl. 2). *Der eine Halbstrahl XA_1 der Geraden liegt auf der einen, der andere auf der andern Seite der Ebene.*

c) *Verbindet man zwei Punkte A_1 und A_2 der beiden verschiedenen Seiten der Ebene β durch eine Gerade, so schneidet diese die Ebene in einem Punkt Y.*

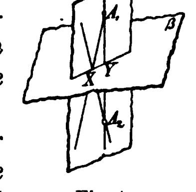


Fig. 1.

6. Wenn eine Ebene α mit einer andern β einen Punkt X gemein hat, so liegen von den Strahlen, die in der Ebene α durch den Punkt X gehen, die Halbstrahlen und Gegenstrahlen auf entgegengesetzten Seiten der Ebene β; zwei Punkte A_1 und A_2 der Ebene α, die auf entgegengesetzten Seiten von β liegen, bestimmen eine Verbindungsgerade, die die Ebene β in einem Punkt Y schneidet. Dann gehört die Verbindungsgerade XY beiden Ebenen an (2). Ausser dieser Geraden, der Schnittgeraden beider Ebenen, können die Ebenen keinen Punkt gemeinsam haben, da durch eine Gerade und einen Punkt ausser ihr nur eine Ebene möglich ist (3 a).

Zwei Ebenen durch einen Punkt haben nur einen Strahl dieses Punktes gemeinsam.

Sind α und β die beiden Ebenen, so kann die Schnittgerade mit $\alpha\beta$ bezeichnet werden.

Der Schatten oder das Bild einer Geraden auf einer Ebene ist eine Gerade, die durch den Spurpunkt der Geraden auf der Ebene geht.

Die Ebenen durch eine gemeinsame Gerade bilden einen Ebenenbüschel, dessen Träger die Gerade ist.

7. Man nennt eine **Gerade parallel einer Ebene**, wenn sie keinen Punkt mit ihr gemein hat.

Nun seien die Geraden a und b parallel, und nur b liege in einer Ebene β. Dann kann die Ebene ab mit β keinen Punkt aufserhalb b gemein haben; somit hat auch die in ihrer ganzen Ausdehnung in der Ebene ab liegende Gerade a, da sie parallel b ist, mit β keinen Punkt gemeinsam. D. h.:

a) *Wenn eine Gerade zu einer Geraden einer Ebene parallel ist, so ist sie der Ebene parallel.*

Sie kann auch hier als Grenzlage angesehen werden, der man durch Hinausrücken des Schnittpunkts mit b in unendliche Entfernung unbeschränkt nahe kommt.

Aus a) folgt:

b) *Wenn eine Gerade der Schnittgeraden zweier Ebenen parallel ist, so ist sie beiden Ebenen parallel.*

8. Umgekehrt werde nun angenommen, eine Gerade a sei einer Ebene β (Fig. 2) parallel. Dann kann irgend eine durch a gelegte Ebene α die Ebene β nur in einer Geraden $\alpha\beta$ schneiden, die $\parallel a$ ist; denn beide Geraden a und $\alpha\beta$ können nicht windschief sein, da beide in der Ebene α liegen, und können einander nicht schneiden, da a mit β keinen Punkt gemein hat. Daraus folgt:

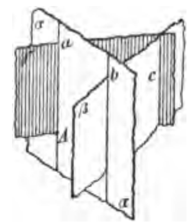


Fig. 2.

a) *Wenn eine Gerade und eine Ebene parallel sind, so schneidet eine Ebene durch die Gerade die erste Ebene in einer Parallelen zur Geraden. Man kann in der Ebene durch jeden ihrer Punkte eine Parallele zu jener Geraden ziehen.*

Eine wagrechte Mauerkante wirft auf eine wagrechte Ebene einen Schatten, der ihr selbst parallel ist.

Ist $a \parallel \beta$ und $a \parallel \gamma$ (Fig. 3), so mufs die Parallele zur Geraden a, die durch einen Punkt der Schnittgraden $\beta\gamma$ gezogen wird, in beide Ebenen fallen, also eben diese Schnittgerade sein; d. h.:

b) *Wenn eine Gerade mit zwei einander schneidenden Ebenen parallel ist, so ist sie deren Schnittgeraden parallel.*

9. *Wenn die Strahlen eines Zweistrahls parallel zu einer Ebene sind, so ist es auch die Ebene des Zweistrahls.*

Fig. 3.

Denn wenn die einander schneidenden Geraden a und b parallel zu einer Ebene β sind und wenn es eine Schnittgerade der Ebenen ab und β gäbe, so müfste diese Schnittgerade $\parallel a$ sein, weil $a \parallel \beta$ ist (8 a), und sie müfste auch $\parallel b$ sein, weil $b \parallel \beta$ ist. Dies ist unmöglich, da nicht zwei Strahlen a und b eines Punktes mit einer Geraden parallel sein können; also haben beide Ebenen keine Schnittgerade.

Da die beiden Strahlen des Punktes aufgefafst werden können als Grenzlagen zweier Strahlen, deren Schnittpunkte mit der Ebene in unendliche Entfernung hinausrückten, so kann die Ebene durch diese Strahlen als *Grenzlage der Ebene* durch den Punkt aufgefafst werden, *deren Schnittgerade mit der ersten Ebene* (d. i. die Verbindungsgerade jener beiden Schnittpunkte) *in unmefsbare Entfernung hinausrückte*; daher heifsen beide *Ebenen parallel.*

Parallele Lichtstrahlen längs paralleler Geraden geben parallele Strahlenebenen.

§ 2. Lage von drei oder mehreren Grundgebilden.

1. Die drei Ebenen α, β, γ schneiden einander in drei Geraden $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$. Die beiden, der Ebene α angehörigen Geraden $\alpha\beta$ und $\gamma\alpha$ mögen sich in dem Punkte P schneiden (Fig. 4). Dieser Punkt gehört als Punkt der Geraden $\alpha\beta$ auch der Ebene β an und ebenso als Punkt von $\gamma\alpha$ der Ebene γ, somit auch der Schnittgeraden $\beta\gamma$, d. i. die Schnittgerade $\beta\gamma$ geht durch denselben Punkt mit den beiden ersteren Schnittgeraden.

Fig. 4.

Ist dagegen (Fig. 2) $\alpha\beta \parallel \gamma\alpha$, so kann auch $\beta\gamma$ weder die Gerade $\alpha\beta$ noch auch $\gamma\alpha$ schneiden, da nach dem Vorangehenden andernfalls stets auch alle drei Geraden durch denselben Schnittpunkt gehen müfsten, was der Annahme $\alpha\beta \parallel \gamma\alpha$ widerspricht; $\beta\gamma$ kann aber auch nicht windschief zu $\alpha\beta$ sein, da beide in β liegen, und ebenso auch nicht windschief zu $\gamma\alpha$. Daher ergiebt sich der Satz:

Die drei Schnittgeraden dreier Ebenen gehen entweder durch einen Punkt oder sind parallel.

Ein Beispiel für den ersten Fall bietet jede Ecke; den zweiten Fall verdeutlichen zwei Dachflächen mit dem Dachboden. — Zwei verschiedene Schattenbilder einer Geraden auf einer Ebene schneiden einander im Spurpunkt der Geraden auf der Ebene, oder sie sind mit einander oder mit der Geraden parallel.

2. *Wenn zwei Gerade einer dritten parallel sind, so sind sie es auch unter einander.*

Wenn nämlich (Fig. 2) $a \parallel c$ und $b \parallel c$, so schneiden einander die Ebenen ac, cb und bA, wobei A ein Punkt von a sei, in dreien zu einander parallelen Geraden, da die Schnittgeraden c und b parallel sind; die dritte Schnittgerade mufs aber mit der Geraden a zusammenfallen, da beide Geraden durch A gehen und parallel c sein sollen. Also ist auch $a \parallel b$.

3. Werden die parallelen Ebenen α und β (Fig. 5) von einer dritten Ebene γ geschnitten, so können die Schnittgeraden $\alpha\gamma$ und $\beta\gamma$ einander nicht schneiden, da sie parallelen Ebenen α und β angehören;

sie können einander aber auch nicht kreuzen, da sie einer einzigen Ebene γ angehören. Daraus folgt:

a) *Zwei parallele Ebenen schneiden ein dritte Ebene in parallelen Geraden.*

Bei parallelen Lichtstrahlen sind die Schatten paralleler Geraden auf einer Ebene parallel.

b) *Durch einen Punkt giebt es zu einer Ebene nur eine parallele Ebene. Alle Strahlen eines Punktes, die parallel zu einer Ebene sind, liegen in einer Ebene.*

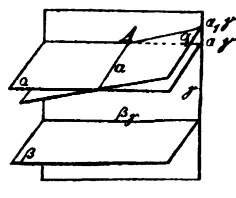


Fig. 5.

Gäbe es nämlich durch einen Punkt A zwei Ebenen α und α_1 parallel zu einer Ebene β, so müfsten deren Schnittgeraden $\alpha\gamma$ und $\alpha_1\gamma$ mit einer weiteren durch A gelegten Ebene γ beide parallel zur Schnittgeraden $\beta\gamma$ sein, was bei einem Punkt A unmöglich ist.

c) *Wenn zwei Ebenen einer dritten parallel sind, so sind sie es auch unter einander.*

Sie können (nach b) keinen Punkt mit einander gemein haben.

d) *Die Schnittgeraden zweier Paare von Parallel-Ebenen sind parallel.*

Ist $\alpha \parallel \alpha_1$, $\beta \parallel \beta_1$, so ist die Schnittgerade $\alpha\beta \parallel \alpha_1\beta \parallel \alpha_1\beta_1$.

4. Sind zwei parallele Ebenen und zwischen ihnen zwei parallele Geraden gegeben, so wird durch diese und die Schnittgeraden ihrer Ebene mit ersteren Ebenen ein Parallelogramm bestimmt, woraus sich ergiebt:

a) *Parallele Ebenen schneiden auf parallelen Geraden gleiche Strecken aus.*

Hieraus folgt weiter, entsprechend der Teilung von Schnittgeraden in einem Parallelstrahlenbüschel (I § 13, 2):

b) *Wenn die eine von drei parallelen Ebenen eine Strecke zwischen den beiden anderen halbiert, so halbiert sie jede solche Strecke.*

Sie heifst Mittelparallelebene der beiden parallelen Ebenen.

5. Wie in der ebenen Geometrie Punkt und Gerade sich in einer Reihe von Sätzen gegenüberstellen lassen, so entsprechen sich in der Geometrie des allseitig ausgedehnten Raumes Sätze, in denen Punkt, Gerade, Ebene der Reihe nach ihre Stelle vertauschen mit Gerade, Ebene, Punkt. In dieser Weise lassen sich einander zur Seite stellen die Sätze:

a) Zwei Punkte einer Ebene bestimmen eine Gerade in ihr.	a′) Zwei Geraden eines Punktes bestimmen eine Ebene durch sie.
b) Zwei Geraden einer Ebene bestimmen einen Punkt (Schnittpunkt).	b′) Zwei Ebenen eines Punktes bestimmen eine Gerade (Schnittgerade).

Wie durch einen Punkt in einer Ebene ein Strahlenbüschel gelegt werden kann, so durch eine Gerade ein Ebenenbüschel. Dem Winkel zweier Geraden entspricht der Winkel zweier Ebenen; dem Dreieck

aus drei Punkten und ihren Verbindungsgeraden entspricht das Dreikant aus drei Strahlen eines Punktes und ihren Ebenen, dem Dreiseit aus drei Geraden einer Ebene das Dreiflach aus drei Ebenen durch einen Punkt.

§ 3. Die Drehung. Die senkrechte Lage und der Ebenenwinkel.

1. Unter der Bewegung eines Gebildes als Ganzem versteht man eine solche Änderung seiner Lage, bei der sich die gegenseitige Lage der Teile des Gebildes unter einander nicht ändert, also nicht die Lage der Punkte in ihren Geraden und dieser in ihren Ebenen, auch nicht ihre Strecken und Winkel.

Eine Drehung eines Gebildes um eine Gerade als Axe ist die Bewegung, bei der die Punkte dieser Geraden ihre Stelle nicht ändern. Die Verbindungsstrecke irgend eines Punktes des Gebildes mit einem Axenpunkt verändert hierbei weder ihre Gröfse, noch ihren Axenschnittpunkt, noch ihren Winkel mit der Axe.

2. Die Schnittgerade zweier Ebenen heifst Kante, wenn die beiden Ebenen in ihr einseitig begrenzt sind. Die beiden Halbebenen bilden einen Keil oder Ebenenwinkel.

Zwei Ebenenwinkel sind einander gleich, wenn bei der Deckung ihrer Kanten und eines Ebenenpaares auch das andere Ebenenpaar zur Deckung kommt, vorausgesetzt dass sie beide auf einer Seite der ersteren Ebene liegen.

Der Ebenenwinkel entsteht durch die Drehung der Halbebene um die Kante als Axe. Eine *volle Drehung* führt die Ebene wieder in ihre ursprüngliche Lage, die *Hälfte* dieser Drehung, eine *Umwendung,* bringt die Halbebene in die Lage ihrer Gegenhalbebene, ein *Viertel einer vollen Drehung* bestimmt *zwei zu einander senkrechte Ebenen.*

3. Scheitelkeile und Nebenkeile entsprechen den Scheitel- und Nebenwinkeln zweier Geraden (I § 7, 6). Wie für diese ergiebt sich:

a) *Nebenkeile bilden zusammen zwei Rechte.*

b) *Scheitelkeile sind einander gleich.*

c) *Durch eine Gerade in einer Ebene giebt es immer nur eine zu dieser senkrechte Ebene.*

4. a) *Wird eine Ebene um eine ihrer Geraden OA umgewendet, so fällt ein zur Axe senkrechter Halbstrahl AC auf den Gegenstrahl AC_1* (vgl. I § 15, 2).

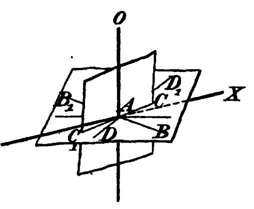


Fig. 6.

Denn da (nach 1) AC und AC_1 mit OA gleiche Winkel bilden, also

$$\sphericalangle\, OAC_1 = OAC = R$$

ist, so ist $\sphericalangle CAO + OAC_1 = 2R$ und beide Winkel liegen gegenseitig zu OA in einer Ebene.

Ebenso wird eine zweite Senkrechte einer andern Ebene OAB, $AB \perp OA$, durch diese Umwendung auf ihren Gegenstrahl AB_1 gebracht, indem hierbei der Keil beider Ebenen auf den Scheitelkeil fällt (3 b). Macht die Ebene CAB die Bewegung mit, so kommt sie nach C_1AB_1 und zwar in dieselbe Lage, wie wenn sie *in sich selbst* eine halbe Drehung (180°) ausführt (I § 9). Jeder weitere Strahl AD dieser Ebene kommt dadurch ebenfalls auf den Gegenstrahl AD_1. Da hierbei der Winkel OAD nach OAD_1 kommt und beide Winkel zusammen $2R$ betragen, so ist $OAD = OAD_1 = R$, d. h.:

b) *Ist eine Gerade senkrecht zu zwei Geraden einer Ebene, so ist sie auf jedem Strahl ihres Schnittpunktes in der Ebene senkrecht.*

Gerade und Ebene heifsen in diesem Fall *senkrecht zu einander.*

5. Umgekehrt folgt:

a) *Alle Geraden, welche in einem Punkt einer Geraden zu dieser senkrecht sind, liegen in einer Ebene.*

Denn (Fig. 6) gäbe es aufserhalb der zu OA senkrechten Ebene BAC noch durch den Punkt A einen zu der Geraden OA senkrechten Strahl AX, so würde eine Ebene durch beide Geraden OA und AX die Ebene BAC auch in einer Senkrechten zur Geraden OA schneiden; es würden sich also zwei Senkrechte zu einer Geraden OA durch einen Punkt A in einer Ebene OAX ergeben, was unmöglich ist.

Ähnlich läfst sich beweisen:

b) *Durch einen Punkt giebt es zu einer Ebene nur eine senkrechte Gerade.*

c) *Durch einen Punkt giebt es zu einer Geraden nur eine senkrechte Ebene. Die zu einer Geraden senkrechten Ebenen sind parallel.*

6. Aus 5 a folgt, dass auch während einer beliebigen Drehung der Ebene BAC um OA kein Punkt der Ebene aus ihr heraustritt (vgl. I § 22):

a) *Bei der Drehung um eine Axe dreht sich eine zur Axe senkrechte Ebene in sich selbst um den Schnittpunkt der Axe als Drehpunkt.*

b) *Bei der Drehung um eine Axe beschreiben alle Punkte Kreisbögen, deren Ebenen senkrecht zur Axe, deren Mittelpunkt in der Axe und deren Mittelpunktswinkel einander gleich sind.*

Die vorgeschichtliche Erfindung des Rades und der Töpferscheibe erforderte diese Kenntnisse. Teilkreis eines Winkelmefsinstrumentes; steht die Axe nicht genau senkrecht auf der Ebene, so wird bei der Drehung die ursprüngliche Ebene nicht beibehalten und die Teilungen der Bögen (Teilkreis und Nonius) schliefsen nicht genau aneinander.

7. Dreht man eine Ebene α (Fig. 7) um eine Axe a, so wird eine in α liegende zur Axe Senkrechte b eine Drehung in einer zur Axe senkrechten Ebene machen, welche Drehung vollständig der der Ebene

entspricht, d. i.: einer halben oder vollen Drehung der Ebene entspricht eine halbe oder volle Drehung der Geraden; gleichen Winkeln der Ebenen entsprechen gleiche Winkel der zur Axe in den Ebenen Senkrechten, da bei der Drehung des Ebenenwinkels um die Kanten nicht blos die Ebenen, sondern auch die entsprechenden Senkrechten zur Deckung gebracht werden können, kurz:

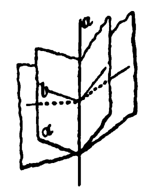


Fig. 7.

Der Winkel zweier Ebenen wird gemessen durch den Winkel zweier in diesen Ebenen liegenden Geraden, die in einem Punkt der Kante zu letzterer senkrecht sind.

Am wagrechten Teilkreis eines Winkelmessers wird der Winkel der lotrechten Ebenen gemessen, die durch die lotrechte Drehaxe und die Richtlinien nach den Zielpunkten bestimmt sind.

8. Daraus ergiebt sich sofort der Satz:

Jede Ebene durch eine Gerade, die auf einer Ebene senkrecht steht, ist selbst senkrecht zu dieser.

Ist nämlich die Gerade a senkrecht zu der Ebene β und durch a die Ebene α gelegt, so ist $a \perp \alpha\beta$; somit ist a der eine Schenkel des Winkels beider Ebenen; auf dem in β liegenden Schenkel $b \perp \alpha\beta$ steht aber a ebenfalls senkrecht, daher ist $\sphericalangle\, ab$ d. i. der Ebenenwinkel $= R$.

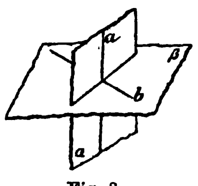


Fig. 8.

9. Nehmen wir an, es sei Ebene $\alpha \perp \beta$, und es werde in α die Gerade $a \perp \alpha\beta$ gezogen, so ist auch $a \perp \beta$. Denn diese Gerade ist der eine Schenkel des Winkels beider Ebenen; sie bildet also auch mit dem zweiten der Ebene β angehörigen Schenkel dieses Winkels einen R, da $\alpha \perp \beta$; daher folgt (nach 4b) $a \perp \beta$. D. h.:

a) *Die Gerade, die innerhalb einer von zweien zu einander senkrechten Ebenen auf deren Schnittgeraden senkrecht steht, ist auch senkrecht zur andern Ebene.*

Ferner ergiebt sich:

b) *Die Senkrechte von einem Punkt zu einer Ebene ist die Schnittgerade aller durch den Punkt gelegten senkrechten Ebenen;*

denn fällt man von einem Punkte P die $a \perp \beta$ und $\gamma \perp \beta$, so muſs die von P auf $\gamma\beta$ gefällte Senkrechte (nach a) auch $\perp \beta$ sein, d. h. mit a zusammenfallen; somit fällt a in γ, und ebenso in jede weitere Ebene durch $P \perp \beta$.

c) *Alle zu einer Ebene senkrechte Geraden sind parallel;*

denn zwei solche Senkrechte a und $a' \perp \gamma$ (Fig. 11) liegen (nach b) in der senkrechten Ebene $\gamma' \perp \gamma$, die durch die Gerade ihrer Schnittpunkte FF_1 bestimmt ist (§ 3, 3c), und sie sind senkrecht zu dieser Geraden FF_1, woraus folgt, daſs $a \parallel a'$ ist (I § 11, 5b).

d) *Die Ebene, die durch eine Gerade senkrecht zu einer Ebene gelegt ist, ist der Ort aller Senkrechten von den Punkten der Geraden zur Ebene;*

denn diese Senkrechten sind parallel und liegen deshalb alle mit der Geraden in einer einzigen Ebene.

10. Wenn man von einem Punkt A innerhalb des Winkels zweier Ebenen α und β Senkrechte zu diesen zieht, $p \perp \alpha$, $n \perp \beta$, so ist die Ebene pn zu beiden Ebenen senkrecht, daher auch zur Schnittgeraden $\alpha\beta$; schneidet nun die Ebene pn die Ebene α in a und β in b, so bestimmt $\sphericalangle ab$ den Ebenenwinkel $\alpha\beta$. Nun ist aber in dem Viereck $pnba$ $\sphericalangle pa = nb = R$, somit $\sphericalangle pn + ab = 2R$, d. h.:

Der Winkel der Halbstrahlen, die von einem Punkt innerhalb eines Ebenenwinkels senkrecht nach den Ebenen gezogen sind, ergänzt den Ebenenwinkel zu 2 R.

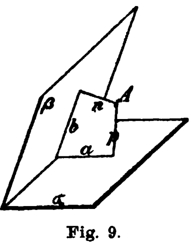


Fig. 9.

§ 4. Die Verschiebung. Winkel von parallelen Geraden und Ebenen.

1. *Die Verschiebung eines Gebildes ist die Bewegung, bei der eine Gerade l* (Fig. 10) *in sich selbst bleibt und ebenso eine Ebene λ durch sie in sich selbst hingleitet.* Die Gröſse der Verschiebung wird durch die Strecke SS_1 zwischen der Anfangs- und Endlage eines Punktes in l gemessen.

Irgend eine zweite Ebene durch die Leitgerade SS_1 muſs, da sie ihren Winkel mit der ersten Ebene λ bei der Verschiebung beibehält, ebenfalls in sich selbst hingleiten. Es bleibt daher zur vollständigen Bestimmung der Verschiebung nur die Angabe der Strecke der Leitgeraden übrig.

Verbinden wir einen Punkt A des Gebildes mit S, so bleibt der Winkel S_1SA bei der Verschiebung innerhalb der Ebene S_1SA, und er bleibt sich selbst gleich; hieraus folgt, daſs $S_1A_1 \# SA$ und daſs $AA_1 \# SS_1$ (vgl. I § 21).

Bei einer Verschiebung beschreiben alle Punkte gleiche und parallele Strecken. Jede zur Verschiebungsrichtung parallele Gerade und Ebene gleitet in sich selbst hin.

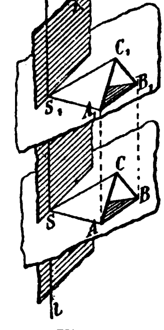


Fig. 10.

Für die Ebene folgt dies daraus, daſs ihre Lage durch zwei parallele Gerade bestimmt ist (§ 1, 3).

2. Da die parallelen und gleichen Strecken $SS_1 \# AA_1 \# BB_1$ von parallelen Geraden begrenzt sind (I § 36, 3a), so folgt weiter $AB \parallel A_1B_1$, d. h.:

Bei einer Verschiebung bleibt jede Gerade sich selbst parallel, ebenso jede Ebene.

Aus $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$ folgt nämlich auch, daſs die Ebene $BAC \parallel B_1A_1C_1$ ist (§ 1, 9).

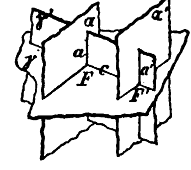


Fig. 11.

3. Werden zwei parallele Ebenen $\alpha \parallel \alpha'$ (Fig. 11) von einer dritten γ geschnitten, so bringt eine Ver-

schiebung um eine Verbindungsstrecke FF_1 die parallelen Schnittgeraden und Ebenen auf einander; der Ebenenwinkel $\alpha\gamma$ fällt also auf $\alpha'\gamma$.

Zwei parallele Ebenen bilden mit einer sie schneidenden Ebene gleiche Winkel je nach einer Seite hin.

4. Wenn die Schenkel ACB und $A_1C_1B_1$ (Fig. 10) paarweise parallel sind, so bringt die Verschiebung um die Strecke CC_1 den einen auf den andern.

a) *Der Winkel zweier Halbstrahlen ist gleich dem zweier gleichgerichtet parallelen Halbstrahlen.*

4'. Wenn die Ebenen der beiden Ebenenwinkel $A(SC)B$ (Fig. 10) und $A_1(S_1C_1)B_1$ paarweise parallel sind, so bringt die Verschiebung der Kante SC nach der parallelen Kante S_1C_1 (§ 2, 3d) beide Winkel zur Deckung.

a') *Der Winkel zweier Halbebenen ist gleich dem zweier gleichgerichtet parallelen Halbebenen.*

Umgekehrt folgt aus diesen Sätzen:

b) *Werden zwei parallele Ebenen um zwei parallele Gerade in ihnen im Betrag gleicher Winkel gedreht, so sind die Ebenen in der neuen Lage ebenfalls parallel und ebenso irgend ein Geradenpaar in ihnen, die in der ersten Lage parallel waren.*

5. *Durch Verschiebung und Drehung kann ein Gebilde in jede andere Lage gebracht werden.*

Denn wenn SAB die Anfangslage, $S_1A_2B_3$ die Endlage ist, so verschiebt man zuerst um SS_1 nach $S_1A_1B_1$; dann dreht man um die auf Ebene $A_1S_1A_2$ in S_1 senkrecht stehende Axe, bis $S_1A_1B_1$ auf $S_1A_2B_2$ fällt, und schliefslich um die Axe S_1A_2 im Betrag des Ebenenwinkels $B_2(S_1A_2)B_3$.

§ 5. Abstand zwischen Punkt und Ebene und Winkel zwischen Gerade und Ebene. Grundrifs.

1. Zieht man durch die Punkte einer Figur die Senkrechten zu einer Ebene, so erhält man auf dieser Ebene ein Bild der Figur, das man als Grundrifs (Orthogonalprojection) jener Figur auf der Ebene bezeichnet.

In der darstellenden Geometrie unterscheidet man den Grundrifs als Bild auf einer wagrechten Ebene vom Aufrifs als dem Bild auf einer lotrechten Ebene.

Ist $AF \perp \beta$, so ist F der Grundrifs von A.

a) *Die senkrechte Strecke von einem Punkte nach einer Ebene ist der kürzeste Abstand zwischen jenem Punkte und den Punkten der Ebene.*

Sie heifst kurz der Abstand des Punktes von der Ebene.

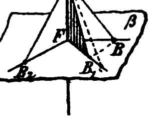


Fig. 12.

Ist nämlich $AF \perp \beta$, und ist B ein weiterer Punkt von β, so ist $\sphericalangle AFB = R$, somit $AB > AF$.

b) *Die Verbindungsstrecken eines Punktes außerhalb einer Ebene mit Punkten derselben, die gleichweit von dem Grundriß des Punktes entfernt sind, sind einander gleich, — und umgekehrt.*

c) *Von zwei Verbindungsstrecken eines Punktes außerhalb einer Ebene mit zwei Punkten derselben ist diejenige die größere, deren Endpunkt von dem Grundriß jenes Punktes weiter entfernt ist, — und umgekehrt.*

Ist nämlich $AF \perp \beta$, und ist in β das $FB_1 = FB$, so bleibt bei einer Drehung von AFB um AF die Gerade FB_1 in der Ebene α (§ 3, 6) und kommt nach FB, so daß dann auch AB_1 und AB einander decken.

Ist dagegen $FB_1 < FB_2$, so bildet nach einer solchen Drehung FB_1 nur einen Teil von FB_2, und es muß auch $AB_1 < AB_2$ sein (I § 18, 3 b).

Umgekehrt folgt aus $FB_1 \gtreqless FB_2$, daß $AB_1 \gtreqless AB_2$ ist, da jeder dieser drei letzteren Fälle jeweils nur mit der entsprechenden ersteren Bedingung nach den oben angeführten Sätzen zusammenbestehen kann.

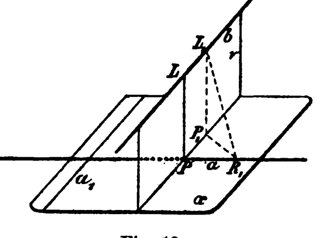


Fig. 13.

Zusatz. a) Ist $b \parallel \alpha$ (Fig. 13), und wird durch b die Ebene $\nu \perp \alpha$ gelegt, so ist $\alpha\nu \parallel b$. Der Abstand dieser Parallelen heißt der Abstand der Geraden b und der Ebene α.

b) Sind a und b zwei windschiefe Gerade und legt man durch einen Punkt von a die Gerade $a_1 \parallel b$, so nennt man $\sphericalangle aa_1$ den Winkel der windschiefen Geraden. Dann ist die Ebene $aa_1 \parallel b$; die Ebene ν, die durch b senkrecht zu dieser Ebene aa_1 gelegt wird, schneidet a in einem Punkte P, dessen Senkrechte PL zur Geraden b den kürzesten Abstand zwischen den Windschiefen a und b gibt ($L_1R_1 > L_1P_1$); dabei heißen P und L die Kreuzungspunkte der Windschiefen.

c) *Eine Gerade LP, die senkrecht zu einer Ebene α ist, kreuzt alle Geraden dieser Ebene, die sie nicht schneidet, rechtwinkelig.*

2. Legt man durch eine Gerade a (Fig. 14), die nicht senkrecht zu einer Ebene β ist, die zu β senkrechte Ebene α, so heißt die Schnittgerade b der Grundriß der Geraden a auf der Ebene β. Der Winkel der Geraden a mit ihrem Grundriß b auf einer Ebene wird der Winkel der Geraden und Ebene genannt.

Am lotrechten Teilkreis eines Winkelmessers wird der Winkel der geneigten Richtlinie mit der wagrechten Ebene gemessen.

Trifft die Gerade AF die Ebene β in F, und ist B der Grundriß von A, FX eine Gerade in β, wobei $AX \perp FX$ sei, so ist $AX > AB$ (1 a), $\sin AFX$ oder $AX : AF > AB : AF$, oder

$$\sin AFX > \sin AFB, \quad \text{also} \quad \sphericalangle AFX > AFB,$$

d. h.:

Der Neigungswinkel einer Geraden und einer Ebene ist kleiner als der Winkel der Geraden mit irgend einer Geraden der Ebene.

Dreht sich die Gerade FB um den Punkt F in der Ebene β, so nimmt der Winkel dieser Geraden mit AF alle Werte an, die zwischen $\sphericalangle AFB$ und $(2R - AFB)$ liegen.

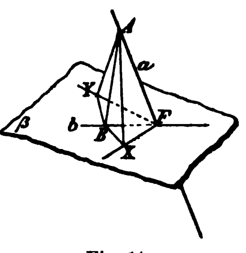


Fig. 14.

3. Zieht man von einem Punkt A die Senkrechte AX auf eine Gerade FX der Ebene β und in dieser Ebene $BX \perp FX$, so ist die Ebene $AXB \perp FX$ (§ 3, 4 b); somit ist sie $\perp \beta$ (§ 3, 8), d. h. BX ist der Grundriſs von AX in der Ebene β; der Winkel BXF ist der Grundriſs des Winkels AXF.

Der Grundriſs eines rechten Winkels, dessen einer Schenkel in der Grundriſsebene liegt (oder ihr parallel ist), ist ein rechter Winkel.

Wenn man nämlich weiter noch in X die Senkrechte zu β und von einem Punkt dieser Senkrechten je eine Parallele zu AX und XF zieht, so ist BXF auch der Grundriſs des Winkels dieser beiden Geraden.

Der Grundriſs einer rechteckigen Dachfläche ist ebenfalls ein Rechteck.

Zusatz. Die Aufgabe: von dem Punkt A die Senkrechte auf die Ebene β zu fällen, wird hiernach gelöst durch dreimalige Zeichnung von Senkrechten in je einer Ebene, nämlich $AX \perp FX$ in Ebene AFX, $BX \perp XF$ in β und $AB \perp BX$ in Ebene ABX.

4. Bildet die Gerade AF mit zwei Geraden FX und FY der Ebene β gleiche Winkel, und zieht man $AB \perp \beta$, $AX \perp FX$, $AY \perp FY$, so ist $\triangle AFX \cong AFY$, $AX = AY$, $BX = BY$ (1 b), $\triangle BFX \cong BFY$, $\sphericalangle BFX = BFY$, d. h.:

Wenn eine Gerade mit zwei Geraden einer Ebene (oder mit zwei Parallelen zu ihr) gleiche Winkel bildet,

a) *so halbiert ihr Grundriſs auf der Ebene den Winkel der beiden Geraden (oder den ihrer Grundrisse);*

b) *so bilden die durch die Geraden gelegten Ebenen auch gleiche Winkel mit jener Ebene — und umgekehrt.*

Die Ebenenwinkel werden nämlich durch AXB und AYB gemessen, während nach obigem $\triangle AXB \cong AYB$ ist. — Der Zusatz in Klammer folgt daraus, daſs man die Strahlen FA, FX und FY parallel mit sich an einen Punkt der in F zu β errichteten Senkrechten verlegen kann, ohne den Grundriſs FB, FX, FY zu ändern.

Stoſsen zwei gleichgeneigte Dach- oder Böschungsflächen aneinander, so halbiert der Grundriſs der Stoſskante den Winkel der Grundlinien.

5. Da die Senkrechten zu einer Ebene parallel sind (§ 3, 9 c), so sind die Ebenen, die man durch parallele Gerade außerhalb der Ebene senkrecht zu dieser legt, durch Paare von Parallelen bestimmt; sie sind also parallel (§ 1, 9), und sie schneiden diese Ebenen in Parallelen (§ 2, 3 a).

Die Grundrisse paralleler Geraden sind parallel.

6. Der Grundriſs einer Strecke AB auf einer Ebene β ist die Strecke A_1B_1 zwischen den Grundrissen ihrer Grenzpunkte. Ist α der Winkel der Geraden und Ebene, so folgt $A_1B_1 = AB \cdot \cos\alpha$

a) *Der Grundriſs einer Strecke auf einer Ebene ist gleich dem Produkt der Strecke mit dem Cosinus des Winkels der Geraden und Ebene.*

Der Grundriſs einer Strecke ist somit um so kleiner, je gröſser der Neigungswinkel; er schrumpft zu einem Punkt zusammen, wenn die Strecke zur Ebene senkrecht wird; er ist der Strecke selbst gleich, wenn diese der Ebene parallel ist. Weiter folgt:

b) *Die Grundrisse paralleler Strecken stehen im Verhältnis dieser Strecken.*

7. Unter dem Grundriſs einer begrenzten Fläche auf einer Ebene versteht man die Fläche, welche von den Grundrissen der Grenzlinien begrenzt ist. (Fig. 15.)

Ist von einem Dreieck in der Ebene α eine Seite a parallel dem Schnitt $\alpha\beta$ zwischen der Ebene α und β, so ist die Höhe h zu dieser Seite des Dreiecks parallel dem in α liegenden Schenkel des Ebenenwinkels $\alpha\beta$, und der Grundriſs h' der Höhe steht auch auf der Richtung von a senkrecht (3); daher ist der Winkel hh' gleich dem Ebenenwinkel $\alpha\beta$ und der Grundriſs h' der Höhe $= h \cdot \cos(\alpha\beta)$; der Flächeninhalt J' des Grundrisses des Dreiecks ist somit, da der Grundriſs von a auch $= a$ ist, $J' = \frac{ah'}{2} = \frac{ah}{2} \cdot \cos(\alpha\beta)$,

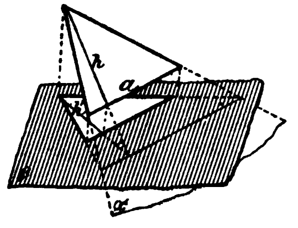


Fig. 15.

also $J' = J \cdot \cos(\alpha\beta)$, wenn J der Inhalt des Dreiecks ist. Diese Gleichung läſst sich als giltig für jede beliebig begrenzte Figur nachweisen, indem man eine solche Fläche stets in Dreiecke zerlegen kann, deren Grundseiten $\parallel \alpha\beta$ liegen und deren Höhen unter einander parallel, so daſs dann das Verhältnis der Inhalte dieser Dreiecke zu denen ihrer Grundrisse gleich $\cos(\alpha\beta)$ ist. Daraus ergiebt sich (II § 2, 6):

Der Grundriſs einer ebenen Fläche ist gleich dem Produkt der Fläche mit dem Cosinus des Ebenenwinkels.

Zweites Kapitel.

Gegengesetzte Lage in Bezug auf Punkt, Gerade oder Ebene. Die Umdrehungsflächen.

A. Gebilde mit einem Mittelpunkt.

§ 6. Gegengesetzte Lage zu einem Punkt.

1. Zwei räumliche Gebilde liegen *gegengesetzt* (И) oder *diametral in Bezug auf einen Punkt (Mittelpunkt), wenn ihre Punkte paarweise auf Halbstrahl und Gegenstrahl dieses Punktes in gleichem Abstand von ihm liegen.* Zwei solche Gebilde geben vereinigt ein
Gebilde mit einem Mittelpunkt (centrisches Gebilde).

Im ersten Teil (§ 9 und 10) wurde bewiesen:

a) *Zwei Figuren, die auf einer Ebene durch den Mittelpunkt gegengesetzt liegen, kommen durch die Umdrehung der Ebene in sich um den Mittelpunkt zur Deckung.*

b) *Gegengesetzte Strahlen liegen gegengerichtet parallel in einer Ebene des Mittelpunkts in gleichem Abstand von ihm.*

c) *Gegengesetzte Strecken sind einander gleich.*

Aus dieser Gleichheit gegengesetzter Strecken folgt, dafs jedes Dreieck mit dem gegengesetzten zur Deckung gebracht werden kann. Hiernach gilt der Satz:

d) *Gegengesetzte Winkel, Dreiecke oder irgend ebene Figuren stimmen vollkommen überein.*

2. a) *Gegengesetzte Ebenen sind parallel in gleichem Abstand vom Mittelpunkt.*

b) *Gegengesetzte Ebenenwinkel sind einander gleich.*

Denn sowohl die gegengesetzten Ebenen, als ihre Winkel werden durch gegengesetzte, also parallele Geraden bestimmt.

3. Gegengesetzte Gebilde, die nicht je einer Ebene angehören, sind im allgemeinen nicht deckungsfähig, z. B. drei Halbstrahlen des Mittelpunktes und die drei Ebenen durch sie können mit den Gegenhalbstrahlen und ihren Ebenen nicht zur Deckung gebracht werden.

Ein Gebilde aus drei Halbstrahlen eines Punktes, die nicht in einer einzigen Ebene liegen und die durch die zwischen ihnen liegenden Ebenenteile verbunden sind, heifst eine dreikantige Ecke oder ein Dreikant. Der Punkt heifst der Scheitel, die Halbstrahlen die Kanten, die Ebenenteile Seiten der Ecke oder Kantenwinkel. Jedem Kantenwinkel liegt ein Ebenenwinkel gegenüber. Die Gegenstrahlen der Kanten bestimmen die Scheitelecke; sie liegt in Bezug auf den Scheitel gegengesetzt zur ersteren Ecke.

Eine Ecke und ihre Scheitelecke stimmen überein in ihren Kanten- und Ebenenwinkeln; verfolgt man aber, von einem Punkt in die Ecke hineinsehend, der Reihe nach die Kanten- und Ebenenwinkel von $\alpha\beta\gamma$ und dann ebenso von einem entsprechenden Punkt in der andern Ecke die Reihenfolge $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, so ist der Drehungssinn von $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ dem von $\alpha\beta\gamma$ entgegengesetzt. Die Umdrehung der Scheitelecke $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ um die im Scheitel auf Ebene γ errichtete Senkrechte m bringt wohl die Kante $\alpha_1\gamma_1$ auf $\alpha\gamma$ und $\beta_1\gamma_1$ auf $\beta\gamma$, aber die Kante $\alpha_1\beta_1$ kommt nicht auf $\alpha\beta$, sondern auf die Gegenseite der Ebene γ nach $\alpha_2\beta_2$; eine zweite Umdrehung um die Winkelhalbierende in γ würde die Kanten der ungleichen Ebenenwinkel $\beta_2\gamma$ auf $\alpha\gamma$ und $\alpha_2\gamma$ auf $\beta\gamma$ bringen, so daſs auch dann nicht entsprechende Ebenenwinkel sich decken.

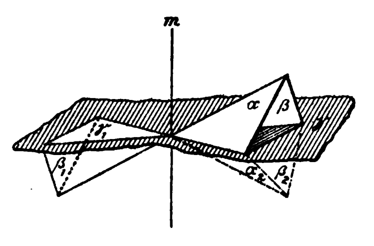


Fig. 16.

Wir nennen solche Gebilde, welche in allen ihren Teilen, wie Strecken zwischen zwei Punkten, Winkel zweier Geraden oder Ebenen, übereinstimmen, während diese Teile von entsprechenden Punkten betrachtet in umgekehrtem Richtungs- oder Drehungssinn auf einander folgen, gegenwendig gleich; die deckungsfähigen Gebilde können dagegen als gleichwendig gleiche bezeichnet werden.

Die Scheitelecke zu einer Ecke ist ihr gegenwendig gleich.

Man kann zwei gegenwendige Dreikante erhalten, indem man zweimal die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma$ aus Pappe ausschneidet und an den inneren Schenkeln einmal nach der einen Seite, das andere mal nach der andern Seite knickt.

4. Denkt man sich die Scheitelecke parallel mit sich verschoben, so bleiben beide Ecken noch gegengesetzt in Bezug auf den Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Scheitel.

Da gegengesetzte Gebilde in ihren Strecken, Strahlen- und Ebenwinkeln übereinstimmen, aber jeder Ecke eine gegenwendige entspricht, so gilt allgemein:

Zwei Gebilde, die in Bezug auf einen Mittelpunkt gegengesetzt liegen, sind gegenwendig gleich.

Zusatz. Doch können die Gebilde unter besonderen Bedingungen auch deckungsfähig sein, z. B. ein Dreikant und die Scheitelecke, wenn zwei Kanten- und zwei Ebenenwinkel einander gleich sind (vgl. § 5, 4b), da dann die Reihenfolge keinen Unterschied ausmacht.

Linke und rechte Hand sind gegenwendige Formen; sie liegen gegengesetzt, wenn z. B. zwei entsprechende Finger sich an der Spitze berühren und die inneren Handflächen nach entgegengesetzten Seiten liegen.

§ 7. Die Kugel als Fläche mit einem Mittelpunkt.

1. Im körperlichen Raum ist *der Ort aller Punkte, die von einem bestimmten Punkt (Mittelpunkt) den gleichen Abstand haben, eine Kugelfläche.*

Dieser Abstand heifst Halbmesser (oder Radius) der Kugel. Zwei gegengerichtete Halbmesser vereint bilden einen Durchmesser der Kugel; die beiden Grenzpunkte eines solchen liegen gegengesetzt in Bezug auf den Mittelpunkt.

Jeder Punkt, der dem Mittelpunkt näher liegt, als ein Kugelpunkt, liegt innerhalb der Kugelfläche, jeder weiter entfernte aufserhalb derselben.

Alle Ebenen durch den Kugelmittelpunkt schneiden die Kugel in Kreisen, deren Halbmesser gleich dem Kugelhalbmesser ist.

Denn alle Punkte der Schnittlinie sind vom Mittelpunkt der Kugel um den Kugelhalbmesser entfernt.

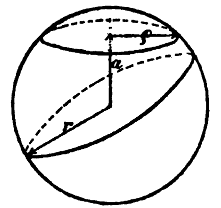


Fig. 17.

2. Eine Ebene, die die Kugel schneidet, giebt eine Schnittlinie, deren Punkte vom Mittelpunkt gleichweit entfernt sind, daher auch gleichweit vom Grundrifs des Mittelpunkts auf der Ebene (§ 5, 1b), also:

a) *Jede durch eine Kugel gelegte Ebene schneidet sie in einem Kreis, dessen Mittelpunkt in der vom Kugelmittelpunkt auf die Ebene gefällten Senkrechten liegt.*

Ist r der Kugelhalbmesser, a der Abstand der Ebene vom Kugelmittelpunkt, ϱ der Halbmesser des Schnittkreises, so ist $\varrho = \sqrt{r^2 - a^2}$. Ist $a = 0$, so erlangt $\varrho = r$ seinen gröfsten Wert. Man nennt daher die Schnittkreise der Ebenen des Kugelmittelpunkts gröfste Kreise oder Hauptkreise der Kugel. Der Schnittkreis schrumpft zu einem Punkt zusammen, wenn $a = r$ wird, m. a. W.:

b) *Die im Endpunkt eines Halbmessers senkrechte Ebene berührt die Kugel in diesem Punkt.*

Eine durch den Berührungspunkt gehende Gerade dieser Berührungsebene (oder Tangentialebene) heifst Berührungsgerade (oder Tangente) der Kugel. Legt man durch eine solche Berührungsgerade irgend eine Ebene, so berührt die Gerade auch deren Schnittkreis, und umgekehrt ist eine Berührende eines Schnittkreises auch Berührende an der Kugel. Man erhält eine Berührungsebene auch mittels zweier Berührenden eines Punktes der Kugel.

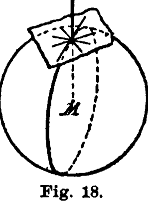


Fig. 18.

3. Verbindet man zwei Punkte A und B einer Kugel durch den Bogen b eines Hauptkreises und durch den Bogen b_1 irgend eines andern Kreises auf der Kugel, und dreht man dann beide Bögen um AB

als Axe in eine Ebene, so wird der Bogen b zwischen der Sehne $AB = s$ und dem Bogen b_1 liegen, so dafs $s < b < b_1$ ist. — Wie aus der Anschauung folgt dies auch daraus, dafs das Verhältnis $\frac{\text{arc}\,\alpha}{\sin\alpha}$ mit wachsendem Winkel von 1 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst (II § 40, 8). Ist nämlich r der Halbmesser der Kugel und ϱ der des Schnittkreises, $r > \varrho$, sind ferner β und α die betreffenden halben Mittelpunktswinkel zur Sehne s, so ist

$$\frac{s}{2r} = \sin\beta, \quad \frac{s}{2\varrho} = \sin\alpha, \quad \frac{r}{\varrho} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad \text{also } \alpha > \beta,$$

demnach $$\frac{\text{arc}\,\alpha}{\sin\alpha} > \frac{\text{arc}\,\beta}{\sin\beta}, \quad \frac{\text{arc}\,\alpha}{\text{arc}\,\beta} > \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad \text{oder} \quad \frac{\text{arc}\,\alpha}{\text{arc}\,\beta} > \frac{r}{\varrho},$$

somit $\varrho\,\text{arc}\,\alpha > r\,\text{arc}\,\beta$, was zu beweisen war. D. h.:

Von allen Kreisbögen durch zwei Punkte auf der Kugelfläche ist der des Hauptkreises der kürzeste,

immer unter der Voraussetzung, dafs der Kreisbogen genommen werde, der kleiner als der Halbkreis ist.

Zwischen zwei Punkten auf einem Parallelkreis der Erde (von gleicher geographischer Breite) ist der Weg auf dem Parallelkreis länger, als der auf dem Hauptkreis.

Man nennt den Bogen des Hauptkreises zwischen zwei Punkten der Kugel den Abstand der Punkte auf der Kugelfläche.

4. Ist MP der zu einer Schnittebene ABO senkrechte Kugelhalbmesser, so bringt die Drehung um diesen den Halbmesser MA nach MB (§ 3, 6 b), daher ist $\sphericalangle AMP = BMP$ und auch Bogen $PA = PB$.

Fig. 19.

a) *Der Grenzpunkt des zu einer Schnittkreisebene senkrechten Halbmessers hat von allen Punkten des Kreises den gleichen Abstand auf der Kugelfläche.*

b) *Der Ort aller Punkte auf einer Kugel, die von einem ihrer Punkte den gleichen Abstand haben, ist ein Kreis, dessen Ebene senkrecht ist zum Kugelhalbmesser nach diesem Punkt.*

Der Pol hat von allen Punkten eines Parallelkreises des Äquators den gleichen Abstand.

Ist C ein Punkt auf PB, so ist der Abstand $CB < CA$. Trifft nämlich der Halbmesser CM die Ebene AOB in S, so ist

$$OS + SB \quad \text{oder} \quad OA < OS + SA, \quad SB < SA;$$

daher ist auch in den Dreiecken SMB und SMA der Winkel $SMB < SMA$ (I § 24, 2 b), also Bogen $CB < CA$.

c) *Der kürzeste Abstand eines Punktes der Kugel von einem Kreis auf ihr ist der Bogen des Hauptkreises, der durch den Punkt geht und dessen Ebene senkrecht auf der des Kreises steht.*

5. Wenn man um den Scheitel S eines Dreikants als Mittelpunkt eine Kugel legt, so wird deren Fläche durch die drei Kanten in drei Punkten A, B, C, durch die drei Ebenen in drei gröfsten Kreisen geschnitten, deren Bögen AB oder c, BC oder a, CA oder b ein Kugeldreieck oder sphärisches Dreieck bestimmen. Diese Bögen

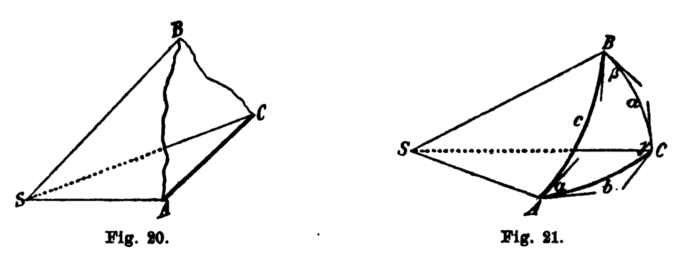


Fig. 20. Fig. 21.

messen die Kantenwinkel ASB, BSC, CSA, während die Winkel α, β, γ der Berührenden in den Schnittpunkten A, B, C der Kreisbögen zugleich die Ebenenwinkel an den Kanten SA, SB, SC messen. Die Kreisbögen heifsen die Seiten, die Winkel α, β, γ die Winkel des Kugeldreiecks.

Die Ausdrücke gleichschenkelig und gleichgeneigt lassen sich vom ebenen Dreieck sofort auf das Kugeldreieck übertragen.

Gemäfs S. 12, 4 b ergiebt sich:

a) *In einem Dreikant oder Kugeldreieck liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber — und umgekehrt,*

und insbesondere:

b) *Ein Dreikant oder Kugeldreieck mit drei gleichen Seiten hat auch drei gleiche Winkel — und umgekehrt.*

Zusatz. Sind die beiden Kantenwinkel Rechte, so sind es auch die ihnen gegenüberliegenden Ebenenwinkel und umgekehrt, wie aus § 3, 8 folgt.

6. Ist in einem Kugeldreieck PAC (Fig. 19) PA die gröfste Seite, und trägt man $PB = PA$ auf die Verlängerung von PC ab, so liegen A und B auf einer zu PM senkrechten Ebene (4 b), und es ist Bogen $CB < CA$ (4 c), also auch

$$PA \quad \text{oder} \quad PC + CB < PC + CA;$$

hiernach ist auch $PA - CA < PC$.

In einem Kugeldreieck (Dreikant) ist die Summe zweier Seiten (Kantenwinkel) gröfser als die dritte Seite (der dritte Kantenwinkel); der Unterschied ist kleiner als die dritte Seite.

7. Ist ABC (Fig. 22) irgend ein Kugeldreieck, so bestimmt die Scheitelecke des Dreikants im Mittelpunkt zu ABC auf der Kugel das Gegendreieck $A_1B_1C_1$, das mit dem Kugeldreieck nicht zur Deckung gebracht werden kann, sondern ihm gegenwendig gleich ist. Der zu

den Ebenen beider Dreiecke (die als gegengesetzte Ebenen parallel sind) senkrechte Kugeldurchmesser MM_1 bestimmt die Lage der Punkte M und M_1 so (4 a), dafs die Bögen $MA = MB = MC = M_1A_1 = M_1B_1 = M_1C_1$ sind. Die gleichschenkeligen Dreiecke MAB und $M_1A_1B_1$ lassen sich zur Deckung bringen (S. 15, 4, Zusatz) und ebenso die beiden andern Dreieckspaare; daraus folgt:

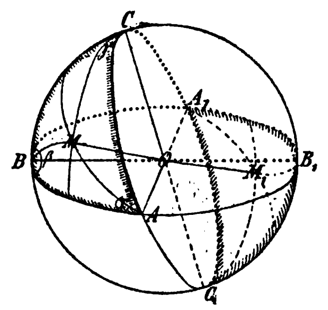


Fig. 22.

Ein Kugeldreieck ist flächengleich seinem Gegendreieck.

Die Gleichheit des Flächeninhalts gilt allgemein für irgend zwei gegengesetzte Flächen, da man diese in gegengesetzte sehr kleine ebene Dreiecke zerlegen kann, die paarweise zur Deckung gebracht werden können.

B. Gebilde mit einer Mittellinie.

§ 8. Gegengesetzte Lage zu einer Geraden.

1. Zwei räumliche Gebilde liegen *gegengesetzt in Bezug auf eine Gerade (Mittellinie oder Axe)* oder axialsymmetrisch, *wenn ihre Punkte paarweise auf Senkrechten zu dieser Geraden in gleichem Abstand von ihr liegen.*

a) *Einem zur Axe senkrechten Halbstrahl entspricht sein Gegenstrahl.*

Eine halbe Drehung (oder Umdrehung) um die Axe bringt jeden Punkt auf seinen Gegenpunkt, woraus folgt:

b) *Zwei Gebilde, die gegengesetzt zu einer Axe liegen, kommen durch die Umdrehung um die Axe zur Deckung.*

Zur Veranschaulichung des folgenden bringe man etwa zwei gleiche Stühle in die entsprechende Stellung. Zwei gleiche Hände (und Personen) beim Handgeben.

2. Für die Figuren einer durch die Axe gelegten Ebene gelten die in I § 15—17 abgeleiteten Beziehungen:

a) *Zu einer Figur in einer Ebene mit der Axe liegt die gegengesetzte Figur in derselben Ebene andererseits der Axe.*

b) *Zu einer Geraden, die die Axe schneidet, liegt die gegengesetzte Gerade in derselben Axenebene mit ihr und trifft die Axe in demselben Punkt unter demselben Winkel.*

c) *Zu einer Geraden, die parallel der Axe ist, liegt die gegengesetzte Gerade parallel in derselben Axenebene im gleichen Abstand von der Axe.*

3. Für die Figuren einer zur Axe senkrechten Ebene gelten die in I § 9 und 10 abgeleiteten Beziehungen (vgl. S. 7, 6 a):

a) *Zu einer Figur, die in einer zur Axe senkrechten Ebene liegt, liegt die in Bezug auf die Axe gegengesetzte Figur in derselben Ebene gegengesetzt in Bezug auf den Axenschnittpunkt als Mittelpunkt.*

b) *Zu einem Strahl, der die Axe rechtwinkelig kreuzt, liegt die gegengesetzte Gerade gegengerichtet parallel in derselben zur Axe senkrechten Ebene und in gleichem Abstand von der Axe.*

4. a) *Wenn eine Ebene die Axe schneidet, so schneidet sie die gegengesetzte Ebene in einer Senkrechten zur Axe* (als einer sich selbst entsprechenden Geraden), *und die Axe liegt auf der Halbierungsebene des Ebenenwinkels*; denn die Schnittgeraden beider Ebenen mit einer zu ihnen senkrechten Axenebene liegen beiderseits entsprechend.

b) *Wenn eine Ebene parallel zur Axe ist, so ist die gegengesetzte Ebene parallel zu ihr in gleichem Abstand,* da die Ebenen als Erzeugnisse gegengesetzter, also paralleler Geraden betrachtet werden können.

5. *Eine zur Axe windschiefe Gerade hat als gegengesetzte Gerade eine ebensolche mit gemeinsamem Kreuzungspunkt auf der Axe und gleichem Abstand; beide Geraden schneiden eine zur Axe senkrechte Ebene in gegengesetzten Punkten und bilden mit diesen Ebenen gleiche Winkel mit gegengerichtet parallelen Grundrissen.*

Es ergiebt sich dies aus der gegengesetzten Lage der Grundrisse.

§ 9. Cylinder, Kegel und Kugel als Flächen mit einer Mittellinie.

1. Bei einer vollen Drehung einer ebenen Linie um eine Gerade in der Ebene als Axe beschreibt die Linie eine Umdrehungs- oder Rotationsfläche. Jeder Punkt der Linie beschreibt einen Kreis, dessen Ebene senkrecht zur Axe und dessen Mittelpunkt in der Axe liegt (S. 7, 6 b).

Eine Umdrehungsfläche wird von jeder zur Axe senkrechten Ebene in einem Kreis geschnitten, dessen Mittelpunkt in der Axe liegt.

Gebrauch der Schablone auf der Töpferscheibe.

2. Eine zur Axe parallele Gerade beschreibt bei der vollen Drehung einen Umdrehungs- oder Rotationscylinder (Fig. 23). Dieser entsteht auch, indem eine Gerade (Erzeugende) senkrecht zur Ebene eines Kreises an dessen Umfang hingeleitet. Es ergiebt sich leicht:

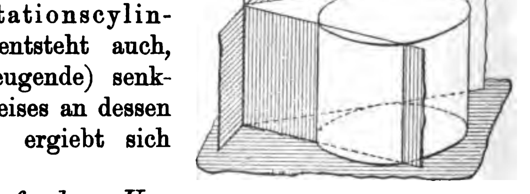


Fig. 23.

a) *Alle Geraden auf dem Umdrehungscylinder (Seitengeraden) sind parallel und haben von der Axe den gleichen Abstand.*

Man nennt diesen Abstand den Halbmesser des Umdrehungscylinders.

Eine zur Axe parallele Gerade in geringerem Abstand liegt innerhalb der Cylinderfläche, eine weiter entfernte aufserhalb. Daher folgt:

b) *Eine Ebene parallel der Axe, deren Abstand von dieser kleiner ist als der der Seitengeraden, schneidet die Umdrehungscylinderfläche in zwei Seitengeraden.*

Denn die durch einen Schnittpunkt parallel zur Axe gezogene Gerade mufs sowohl der Ebene, als der Cylinderfläche angehören. Ebenso folgt:

c) *Eine zur Axe parallele Ebene, deren Abstand von der Axe gleich dem der Seitengeraden des Umdrehungscylinders ist, berührt letzteren in einer Seitengeraden, die der Grundrifs der Axe auf der Ebene ist.*

Alle nicht parallel der Axe gelegten Ebenen treffen die Seitengeraden der Cylinderfläche je in einem Punkt. Die Schnittlinie wird Ellipse genannt (vgl. S. 25, 4a).

3. Eine die Axe schneidende Gerade beschreibt bei der Drehung um die Axe einen Umdrehungs- oder Rotationskegel. Diese Kegelfläche entsteht auch, indem eine Gerade (Erzeugende) in einem Punkt fest bleibt und dabei an einem Kreis (der sog. Leitlinie) hingleitet, der um den Grundrifs des Punktes auf einer Ebene beschrieben ist. Der Axenpunkt, d. i. der feste Punkt heifst die Spitze oder der Mittelpunkt der Kegelfläche; jede Gerade durch sie längs der Kegelfläche heifst Seitengerade. Beiderseits der Spitze liegen zwei gegengesetzte Teile der Fläche (letztere wird deshalb auch Doppelkegel genannt). Aus der Entstehung folgt:

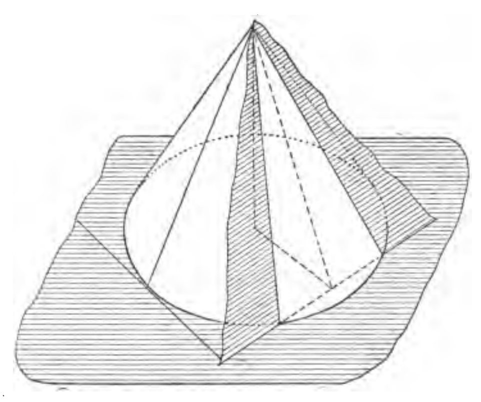


Fig. 24.

a) *Alle Seitengeraden eines Umdrehungskegels bilden mit der Axe gleiche Winkel.*

Eine Gerade durch die Spitze, welche einen kleineren Winkel mit der Axe bildet, liegt innerhalb des von der Fläche eingeschlossenen Raumes, eine mit gröfserem Winkel aufserhalb.

Von den Ebenen durch die Spitze wird diejenige, die zugleich durch die Axe geht, Axenschnitt genannt. Sie schneidet die Kegelfläche in zwei einander gegenüberliegenden Seitengeraden, deren Winkel als Winkel des Axenschnittes bezeichnet wird.

Eine Ebene durch die Spitze, deren Winkel mit der Axe gröfser ist, als der zwischen der Axe und der Seitengeraden, trifft die Kegel-

fläche nur in der Spitze (Fig. 27 a). Dagegen gilt für die Ebene XSY (Fig. 27 b):

b) *Eine Ebene durch die Spitze, deren Winkel mit der Axe kleiner ist, als der der Seitengeraden, schneidet die Kegelfläche in zwei Seitengeraden.*

Ist der Winkel der Axe und Ebene gleich dem halben Axenschnittwinkel (Ebene SL in Fig. 27 c), so hat die Ebene mit der Kegelfläche nur den Grundrifs der Axe auf der Ebene gemeinsam; die beiden Schnittgeraden sind in diesem Falle in Eine zusammengerückt.

c) *Eine Ebene durch die Spitze eines Umdrehungskegels, welche mit der Axe denselben Winkel bildet wie die Seitengerade, berührt die Kegelfläche längs einer Seitengeraden, dem Grundrifs der Axe auf der Ebene.*

Eine solche Ebene heifst Berührungs- oder Tangentialebene der Kegelfläche. Alle Geraden dieser Ebene, die die genannte Seitengerade schneiden, berühren die Kegelfläche in ihrem Schnittpunkt.

4. Wenn ein Kreis und eine Berührende desselben um einen Durchmesser sich dreht, so beschreibt der Kreis eine Kugel-, die Berührende eine Kegelfläche, deren Spitze in dem Schnittpunkt der Berührenden mit der Verlängerung des Durchmessers liegt und deren Seitengeraden die Kugelfläche berühren, so dafs die Kegelfläche mit der Kugelfläche nur den vom Berührungspunkt beschriebenen Kreis gemeinsam hat. Man erhält so eine die Kugel berührende Kegelfläche (Fig. 25).

Ist eine Kugel und ein Punkt S aufser ihr gegeben, so läfst sich durch den Punkt immer eine Berührende ziehen und durch Umdrehung um die Verbindungsgerade des Punktes mit dem Mittelpunkt erhält man die Gesamtheit aller Berührenden von dem Punkt an die Kugel, d. h.:

Fig. 25.

a) *Alle Berührenden von einem Punkt an eine Kugel bilden einen Umdrehungskegel, welcher jenen Punkt als Spitze hat und die Kugel in einer Kreislinie berührt, deren Ebene senkrecht zur Mittellinie nach dem Punkte ist.*

Daraus folgt weiter:

b) *Alle Strecken der Berührenden von einem Punkt an eine Kugel sind einander gleich.*

Es ergiebt sich dies auch aus dem leicht durch Schnittkreise nachweisbaren Satz (II § 10, 4):

c) *Für alle Strahlen eines Punktes nach einer Kugel ist das Produkt der beiden Strahlstrecken eines Strahles das gleiche und zwar, wenn der Punkt innerhalb liegt, gleich dem Quadrat des Halbmessers des zum Durchmesser des Punktes senkrecht gelegten Schnittkreises, dagegen wenn der Punkt aufserhalb liegt, gleich dem Quadrat der Berührenden des Punktes an die Kugel.*

Dies Produkt heifst Potenz des Punktes in Bezug auf die Kugel.

5. Wenn eine Kreisberührende demjenigen Durchmesser parallel ist, um welchen die Umdrehung des Kreises und der Berührenden stattfindet, so beschreibt letztere eine die Kugel in einem Hauptkreis berührende Cylinderfläche (Fig. 26).

Alle parallelen Berührenden einer Kugel bilden einen Umdrehungscylinder, dessen Axe der zu den Berührenden parallele Durchmesser ist und der die Kugel in einem gröfsten, zur Berührenden senkrechten Kreise berührt.

6. Wenn zwei Kreise um ihre gemeinsame Mittellinie sich drehen, so entstehen zwei Kugeln. Für diese ergiebt sich aus I § 30:

Fig. 26.

a) *Zwei Kugeln schneiden einander in einem zur gemeinsamen Mittellinie senkrechten Schnittkreis, wenn ihr Mittelpunktsabstand kleiner als die Summe und gröfser als der Unterschied ihrer Halbmesser ist.*

b) *Zwei Kugeln berühren einander in einem Punkt ihrer gemeinsamen Mittellinie, wenn ihr Mittelpunktsabstand gleich der Summe der Halbmesser (bei ausschliefsender Berührung) oder gleich deren Unterschied (bei einschliefsender Berührung).*

§ 10. Kegelschnitte im Umdrehungskegel.

1. Jede nicht durch die Spitze gelegte Ebene schneidet eine Kegelfläche in einer krummen Linie, welche man Kegelschnitt nennt, und zwar kann man drei Arten unterscheiden: 1) Die Ebene trifft alle Seitengeraden einerseits der Spitze; dann heifst der Kegelschnitt Ellipse (Fig. 27 a). Der zur Axe senkrechte Kreisschnitt ist ein besonderer Fall hiervon. 2) Die Ebene ist parallel einer Seitengeraden (Fig. 27 c); alle andern Seitengeraden werden also von der Ebene getroffen. Man sagt dann von dem Kegelschnitt, er habe einen unendlich fernen Punkt; er heifst Parabel. 3) Die Ebene ist parallel zu zwei Seitengeraden (Fig. 27 b); sie trifft hierbei die beiden Teile der Kegelfläche, indem alle Seitengeraden aufser den beiden genannten entweder einerseits oder andrerseits der Spitze getroffen werden. Man sagt von diesem Kegelschnitt, er habe zwei unendlich ferne Punkte; er heifst Hyperbel.

In diesen drei Fällen ist der Winkel zwischen der Schnittebene und Axe der Reihe nach gröfser, gleich, kleiner als der Winkel zwischen der Seitengeraden und Axe.

Die Ebene, die durch die Kegelaxe senkrecht zur Kegelschnittebene gelegt ist, bestimmt in dieser die Axe BB_1 des Kegelschnittes.

2. Legen wir im Fall des Hyperbelschnittes durch die Spitze S eine Ebene XSY (Fig. 27 b) parallel der Schnittebene, und in den Seitengeraden SX und SY, in welchen der Kegel von dieser Ebene geschnitten wird, die berührenden Ebenen an die Kegelfläche, so schneiden diese die

Hyperbelebene in zwei Geraden $X_1 M \parallel SX$ und $Y_1 M \parallel SY$. Wo nun auch der Punkt P_1 auf der Hyperbel angenommen wird, so trifft die zu BB_1 Senkrechte $O_1 P_1$ die Gerade $X_1 M$ in einem Punkt X_1, von dem aus die Strecke

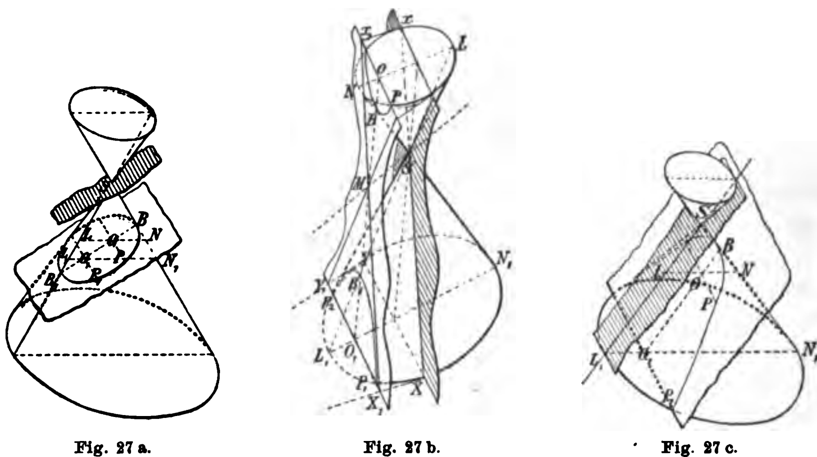


Fig. 27 a. Fig. 27 b. Fig. 27 c.

$X_1 X$ nach dem Berührungspunkt X des zugehörigen Kegelkreises stets dieselbe Gröfse hat, da diese Strecken stets Parallelstrecken zwischen Parallelen sind. Schneidet die Gerade $O_1 P_1$ den Kegelkreis noch in P_2, so ist $\overline{X_1 P_1} \cdot \overline{X_1 P_2} = \overline{X_1 X}^2$ eine unveränderliche Gröfse für alle solche Punkte P_1; es mufs daher $X_1 P_1 = \frac{\overline{XX_1}^2}{\overline{X_1 P_2}}$ um so kleiner werden, je weiter der Punkt P_1 von der Spitze S oder vom Punkte M hinausrückt, da der Nenner dieses Bruches dann stets gröfser wird; dasselbe gilt für $Y_1 P_2$. Die Hyperbel nähert sich daher mehr und mehr den Geraden MX_1 und MY_1, ohne sie je zu erreichen. Man nennt diese Geraden die Asymptoten der Hyperbel; sie sind als die Berührenden in den unendlich fernen Punkten der Hyperbel aufzufassen. Dafs die Asymptoten durch den Mittelpunkt M der Axe BB_1 gehen, ergiebt sich daraus, dafs zu SL_1 und SN_1 der Strahl von S nach dem Schnittpunkt der Berührenden XX_1, YY_1 und der Strahl nach der Mitte der Sehne XY harmonisch zugeordnet sind (II, § 19, 3a, 2b, § 17, 2b).

3. Ziehen wir durch zwei Punkte P und P_1 des Kegelschnittes die Senkrechten PO, $P_1 O_1$ zur Axe BB_1, so lassen sich durch diese Senkrechten noch Ebenen senkrecht zur Kegelaxe legen. Diese Ebenen schneiden den Kegel in Kreisen, in welchen die der Axenebene SBB_1 angehörigen Durchmesser LN und $L_1 N_1$ ebenfalls senkrecht zu PO und $P_1 O_1$ sind. Es folgt hieraus, dafs in der Ellipse und Hyperbel

$$\frac{\overline{PO}^2}{\overline{P_1 O_1}^2} = \frac{\overline{LO} \cdot \overline{ON}}{\overline{L_1 O_1} \cdot \overline{O_1 N_1}} = \frac{\overline{B_1 O}}{\overline{B_1 O_1}} \cdot \frac{\overline{BO}}{\overline{BO_1}},$$

dagegen in der Parabel $\frac{\overline{PO}^2}{\overline{P_1 O_1}^2} = \frac{\overline{BO}}{\overline{BO_1}}$, da hier $LO = L_1 O_1$.

In einer Ellipse oder Hyperbel verhalten sich die Quadrate zweier zur Axe senkrechten Halbsehnen, wie die Produkte der zugehörigen Abschnitte der Axe, in einer Parabel wie die zugehörigen Abschnitte der Axe.

4. a) In der Ellipse ist $BB_1 = 2a$ die grofse Axe und die zu ihr Senkrechte im Mittelpunkt $= 2b$ die kleine Axe. Läfst man O_1P_1 mit b zusammenfallen, so wird $O_1P_1 = b$, $B_1O_1 = O_1B = a$; wird dann noch $OP = y$ und der Abstand dieser Geraden vom Mittelpunkt $= x$ gesetzt, so ist $\frac{y^2}{b^2} = \frac{(a+x)(a-x)}{a^2} = \frac{a^2-x^2}{a^2}$ oder $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$. Dies ist die Gleichung der Ellipse. — Für einen Cylinderschnitt ergiebt sich auf gleiche Weise dieselbe Gleichung.

b) Haben in der Hyperbel a, x, y, x_1, y_1 dieselbe Bedeutung, wie angegeben, so folgt: .

$$\frac{(x-a)(x+a)}{y^2} = \frac{(x_1-a)(x_1+a)}{y_1^2} \quad \text{oder} \quad \frac{x^2-a^2}{y^2} = \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2 - \left(\frac{a}{y_1}\right)^2.$$

Rückt O_1P_1 unmefsbar weit hinaus, so nähert sich die Strecke O_1P_1 der in der Asymptoten begrenzten O_1X_1 und das Verhältnis $\frac{x_1}{y_1}$ dem Verhältnis $\frac{MO_1}{O_1X_1} = \frac{a}{b}$, wenn b die in B auf der Axe errichtete und in der Asymptote begrenzte Senkrechte ist. Zugleich wird $\frac{a}{y_1}$ mit wachsendem y_1 verschwindend klein, so dafs $\frac{x^2-a^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Dies ist die Hyperbelgleichung.

c) Ist in der Parabel $OP = y$, $OB = x$, so ist $\frac{y^2}{x} = \frac{y_1^2}{x_1} = p$, d. i. eine unveränderliche Gröfse, also $y^2 = px$. Dies ist die Parabelgleichung.

Die analytische Geometrie leitet aus diesen Gleichungen der Kegelschnitte alle Eigenschaften der Linien ab.

5. In einen Umdrehungskegel (oder Umdrehungscylinder) lassen sich, wie aus § 9, 4 und 5 folgt, unbegrenzt viele berührende Kugeln legen, deren Mittelpunkte auf der Axe liegen. Soll aber auch noch irgend eine (nicht durch die Spitze der Kegelfläche gehende) Ebene von der Kugel in einem Punkt berührt werden, so erfüllen nur zwei Kugeln die gestellten Bedingungen. Diese Kugeln werden erhalten (Fig. 28), indem man die beiden Kreise zeichnet, welche in dem zur gegebenen Ebene senkrechten Axenschnitt die Seitengeraden der Umdrehungsfläche und die Schnittgerade der gegebenen Ebene berühren, und dann diese Kreise um die Axe sich drehen läfst. Der Berührungspunkt zwischen dem Kreis und dieser Schnittgeraden ist dann auch Berührungspunkt zwischen der Kugel und der Ebene, da alle andern Punkte der Ebene weiter als er vom Mittelpunkt des Kreises entfernt sind.

Dieser Berührungspunkt F wird ein Brennpunkt des Kegelschnittes der Ebene genannt. Die Halbmesser der Kugeln nach beiden Brennpunkten F und F_1 sind parallel, da sie auf derselben Ebene senkrecht

stehen; daher geht der Strahl SF' auch durch den andern Grenzpunkt des durch F bestimmten Kreisdurchmessers (II § 13, 1 b).

Beachten wir in den drei Fällen den Abstand des Strahlpunktes S von der Ebene BPB_1, so ergiebt sich:

Der Schatten einer von einem Punkt aus bestrahlten Kugel auf einer Berührungsebene ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, wenn der Abstand des Strahlpunktes von der Ebene gröfser, ebenso grofs oder kleiner als der Durchmesser der Kugel ist. Der Berührungspunkt ist der eine Brennpunkt; der andere Brennpunkt ist der Schattenpunkt des dem Berührungspunkt gegengesetzten Punktes der Kugel.

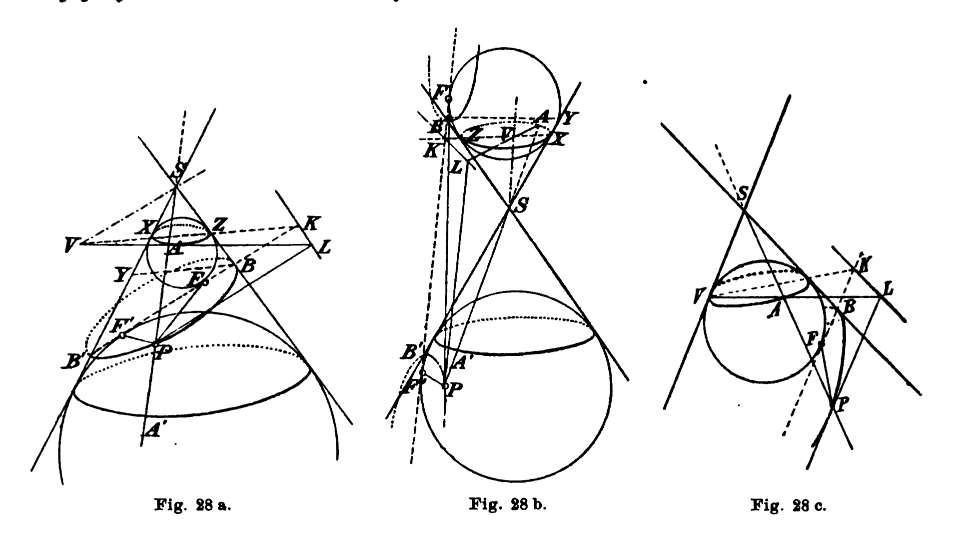


Fig. 28 a. Fig. 28 b. Fig. 28 c.

6. Der Abstand eines Punktes P des Kegelschnittes von einem Brennpunkt, der Fahrstrahl FP des Punktes P, ist gleich der Strecke PA der Seitengeraden der Kegelfläche von demselben Punkt bis zu ihrem Berührungspunkt A auf der Kugel (S. 22 4 b). Bei der Ellipse ist daher die Summe der beiden Strecken von dem Punkt P nach den beiden Brennpunkten F und F_1, also $PF + PF_1 = AA_1$, d. i. gleich der Seitenstrecke von dem Berührungspunkt der einen Kugel bis zu dem der andern. Diese ist aber nach Teil I § 35, Zus. 3 gleich der durch die Brennpunkte gehenden Sehne BB_1, d. h. gleich der Hauptaxe der Ellipse.

Bei der Hyperbel liegen die berührenden Kugeln beiderseits der Spitze, so dafs hier der Unterschied der beiden Fahrstrahlen eines Punktes $PF - PF_1$ gleich der Seitenstrecke AA_1 zwischen beiden Berührungskreisen der Kugeln und der Kegelfläche ist.

In der Ellipse ist die Summe, in der Hyperbel der Unterschied der Fahrstrahlen von den Brennpunkten nach einem Punkt des Kegelschnittes unveränderlich, nämlich gleich der Axe desselben.

Daſs beide Brennpunkte von den sogen. Scheiteln B und B_1, den Grenzpunkten der Axe, gleichweit entfernt sind, folgt aus Teil I § 35, Zus. 2.

Sind von *einem Kegelschnitt die Axe und die Brennpunkte gegeben,* so sind hiernach leicht *Punkte desselben zu finden.* Ist $2a$ die Länge der Axe, so giebt es zu den Fahrstrahlstrecken f und $(2a \mp f)$ stets vier Punkte, zu welchen die Hauptaxe und deren Mittelsenkrechte Mittellinien sind und ihr Schnittpunkt Mittelpunkt ist.

Gärtnerische Ausführung einer Ellipse mittels einer Schnur, deren Enden in zwei Pfählen befestigt sind, während der die Linie beschreibende Stift sie gespannt erhält.

7. Zu der Axenebene durch den Brennpunkt F ist die Ebene des Kegelschnittes senkrecht und ebenso die Ebene des Berührungskreises zwischen Kugel- und Kegelfläche; daher ist die Schnittgerade KL beider senkrechten Ebenen auch auf der Axenebene senkrecht. Diese Schnittgerade wird Leitgerade des Kegelschnittes genannt; zu jedem Brennpunkt gehört eine Leitgerade.

Die vom Brennpunkt F zu seiner Leitgeraden senkrecht gezogene Gerade sei FK; die Parallele zu FK durch die Spitze S der Kegelfläche treffe die Ebene des Berührungskreises in V. Zieht man noch die Senkrechte PL von einem Punkt P des Kegelschnittes zu der Leitgeraden, so ist $PL \parallel FK \parallel SV$, daher $PA : PL = SA : SV$ oder

$$PF : PL = SA : SV.$$

Nun ist das Verhältnis $SA : SV$ dasselbe, wo auch der Punkt P liegt (S. 22 4b), und zwar ist bei der Ellipse $SA < SV$, indem V auſserhalb der Fläche des Berührungskreises liegt (§ 5, 1c), bei der Hyperbel $SA > SV$, da V innerhalb der Kreisfläche liegt, bei der Parabel $SA = SV$, da SV eine Seitengerade des Kegels ist. In den ersten beiden Fällen ergiebt sich, wenn noch $BY \parallel VK$ gezogen wird:

$$SA : SV = SX : SV = B'X : B'K = B'Y : B'B,$$

wobei nun $B'Y = B'X \mp BZ = B'F \mp BF = FF'$.
Ist c der Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt der Kugel, die sog. lineare Excentricität, und ist a die halbe Axe, so folgt

$$PF : PL = FF' : BB' = 2c : 2a = c : a = e,$$

welches Verhältnis als (zahlenmäſsige) Excentricität benannt wird.

In jedem Kegelschnitt ist das Verhältnis der Abstände eines Punktes von dem Brennpunkt und dessen Leitgeraden unveränderlich, nämlich gleich der Excentricität e des Kegelschnittes. Es ist $e < 1$ in der Ellipse, $e > 1$ in der Hyperbel, $e = 1$ in der Parabel.

Wenn von einer Parabel *der Brennpunkt und die Leitgerade gegeben sind, so können* hiernach leicht *Punkte des Kegelschnittes erhalten werden,* die von dem Punkt und der Geraden den gleichen Abstand haben. Bei der

Ellipse und Hyperbel mufs noch aufserdem das Verhältnis $c:a$ gegeben sein.

8. Halbiert man in der Hyperbel den Winkel der beiden Fahrstrahlen eines Punktes P, in der Ellipse deren Nebenwinkel, in der Parabel den Winkel des Fahrstrahls mit der Senkrechten zur Leitgeraden, und bestimmt man zu dieser Winkelhalbierenden als Mittellinie den Punkt F_2, der anderseits F entspricht, so ist für irgend einen andern Punkt L der Winkelhalbierenden $LF_2 = LF$, während in der Hyperbel und Ellipse F_1F_2 gleich der Hauptaxe $2a$ und $LF_1 - LF_2 < F_1F_2$ oder $LF_1 + LF_2 > F_1F_2$; in der Parabel liegt F_2 auf der Leitgeraden und es ist $LF_2 > LM$, wenn M der Fufspunkt der Senkrechten von L zur Leitgeraden ist. Daraus

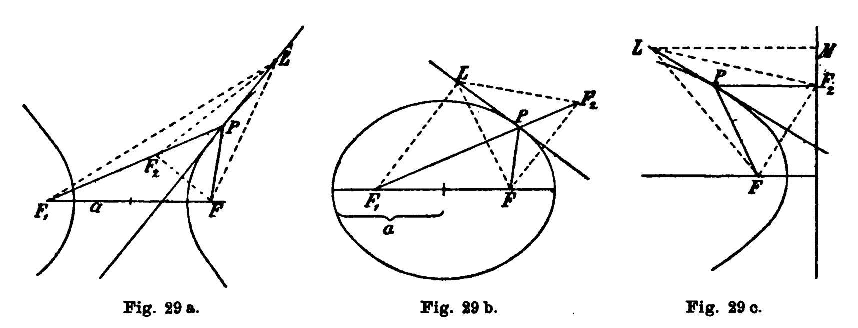


Fig. 29 a. Fig. 29 b. Fig. 29 c.

folgt, dafs der Punkt L nicht dem Kegelschnitt angehören kann, da dies dem Satze 6 (oder 7) widersprechen würde. Die Winkelhalbierende hat also mit dem Kegelschnitt nur den Punkt P gemeinsam; sie ist Berührende an ihn. Wenn wir in der Parabel auch die Senkrechte zur Leitgeraden Fahrstrahl nennen, so gilt für alle Kegelschnitte der Satz:

Die Fahrstrahlen eines Punktes in einem Kegelschnitt bilden mit dessen Berührender gleiche Winkel.

Die von einem Brennpunkt ausgehenden Strahlen des Schalles, des Lichtes, der Wärme oder der Elektrizität werden an der Parabel parallel der Axe zurückgeworfen, an der Ellipse nach dem andern Brennpunkt, an der Hyperbel so, als kämen sie von dem andern Brennpunkt.

9. Hiernach ist *die Berührende eines Punktes auf dem Kegelschnitt zu bestimmen, wenn die Brennpunkte* (Leitgeraden) *gegeben sind.* — Ist *von einem Punkt L aufserhalb des Kegelschnittes die Berührende zu ziehen,* so erhält man zunächst den Punkt F_2 durch die Kreisbögen aus L mit dem Halbmesser LF und aus F_1 mit dem Halbmesser $2a$ (mittels der Leitgeraden bei der Parabel); es ergeben sich so zwei Berührende durch L. — Ist *eine Berührende parallel zu einer Geraden zu zeichnen,* so tritt an die Stelle des ersten Kreisbogens die Senkrechte von F zu der Geraden.

C. Gebilde mit einer Mittelebene.

§ 11. Beiderseits gleiche Lage zu einer Ebene.

1. Den Figuren, die in einer Ebene beiderseits gleich liegen in Bezug auf eine ihrer Geraden als Axe, entspricht die Lage der Gebilde des allseitig ausgedehnten Raumes beiderseits einer Mittelebene oder Symmetrieebene (Spiegelebene). Zwei Gebilde liegen *beiderseits gleich* oder *symmetrisch* ($\wedge$) *zu einer Ebene (Mittelebene), wenn ihre Punkte paarweise je auf einer Senkrechten der Ebene in gleichem Abstand von ihr liegen.* Zwei solche Gebilde vereinigen sich zu einem in sich beiderseits gleichen oder symmetrischen Gebilde.

Das Bild eines Gegenstandes in einem ebenen Spiegel erscheint in demselben Abstand hinter dem Spiegel, wie der Gegenstand vor ihm. Eine Mittelebene besitzen der menschliche Körper und zahllose Kunsterzeugnisse.

Die Mittelebene zu zwei Punkten ist die in der Mitte ihrer Strecke senkrecht errichtete Ebene; diese Ebene ist der Ort aller Mittelsenkrechten zu beiden Punkten und der Ort aller Punkte, die von dem einen Punkt ebenso weit entfernt sind, als von dem andern.

2. Alle Senkrechten, die von den Punkten einer Geraden auf die Mittelebene gefällt werden, gehören der Ebene an, die durch die Gerade senkrecht zur Mittelebene gelegt wird (S. 8, 9 d); auf dieser Ebene liegt andrerseits die entsprechende Gerade der Art, dafs die Umwendung um die Schnittgerade beider Ebenen die eine Gerade mit der andern zur Deckung bringt (I § 15—19).

a) *Beiderseits gleichliegende Geraden liegen auf einer zur Mittelebene senkrechten Ebene, schneiden einander auf der Mittelebene und diese halbiert ihren Winkel senkrecht zu ihrer Ebene. Die Mittelebene ist der Ort aller Strahlen, die mit beiden Geraden gleiche Winkel bilden.*

Das letztere ergiebt sich als Umkehrung von S. 12, 4 a.

Alle Strahlen eines Punktes werden von dem Spiegel so zurückgeworfen, als kämen sie von dem andrerseits gleichliegenden Punkt. Der einfallende und der zurückgeworfene Strahl machen denselben Winkel mit der Spiegelebene.

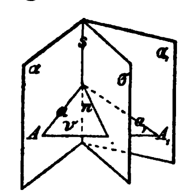
b) *Beiderseits gleichliegende Geraden sind parallel, wenn eine von ihnen parallel der Mittelebene ist; die Mittelebene geht durch ihre Mittelparallele und steht auf ihrer Ebene senkrecht.*

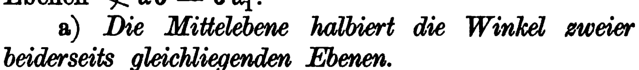
c) *Irgend eine Figur einer zur Mittelebene senkrechten Ebene wird mit der ihr andrerseits entsprechenden zur Deckung gebracht durch die Umwendung um die Schnittgeraden beider Ebenen.*

3. Verbindet man zwei beiderseits gleichliegende Punkte A und A_1 mit einem Punkt der Mittelebene, so erhält man zwei entsprechende Geraden. Legt man durch beide Punkte A und A_1 je eine Ebene α und α_1 nach einer Geraden s der Mittelebene σ, so können beide Ebenen als Erzeugnisse der Drehung je einer Geraden

um den Punkt A oder A_1 längs der Geraden σ als Leitgeraden aufgefafst werden; daher entsprechen einander beide Ebenen (2 a).

Eine zu s senkrechte Ebene ν ergiebt als Schnittgerade in der Mittelebene die Gerade n und in den Ebenen α und α_1 die entsprechenden Geraden a und a_1 (2 a); es ist somit $\sphericalangle\, an = na_1$. Da die Geraden a, n, a_1 senkrecht zu s sind, so bestimmen sie die Winkel der Ebenen $\sphericalangle\, \alpha\sigma = \sigma\alpha_1$.


Fig. 30.



a) *Die Mittelebene halbiert die Winkel zweier beiderseits gleichliegenden Ebenen.*

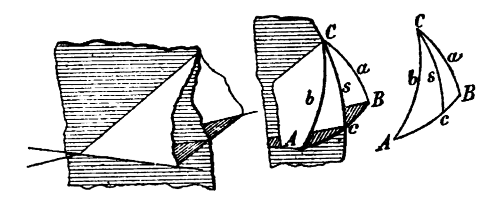
b) *Die Ebenen, welche die beiden Winkel zweier Ebenen halbieren, sind der Ort aller Punkte, die von beiden Ebenen denselben Abstand haben;*

denn jeder Punkt von n ($\perp s$ in ν) ist von a und a_1 gleichweit entfernt (I § 19, 3 a) und seine Abstände von a und a_1 sind zugleich die von α und α_1, da die Ebene ν, in der sie liegen, senkrecht zu beiden Ebenen ist (S. 8, 9 d).

Insbesondere ergiebt sich für den Fall, dafs die Schnittgerade einer Ebene mit der Mittelebene in unmefsbar grofse Entfernung hinausrückt:

c) *Ist eine Ebene parallel der Mittelebene, so ist es auch die andrerseits entsprechende und zwar in gleichem Abstand; die Mittelebene ist ihre Mittelparallelebene* (S. 5, 4 b).

4. Zwei beiderseits entsprechende Ebenen werden von einer zur Mittelebene senkrechten Ebene in entsprechenden Geraden geschnitten. Diese beide Geraden und die Schnittgerade jener Ebenen bestimmen ein gleichschenkeliges Dreikant (2 a) und auf der Kugel um den Scheitel ein gleichschenkeliges Kugeldreieck (S. 18, 5). Der Bogen s der Mittelebene in einem solchen Dreieck kann auf vier Arten bestimmt werden.


Fig. 31.

In einem gleichschenkeligen Kugeldreieck fallen auf einander der Bogen,

a) *der den Winkel an der Spitze halbiert,*	a′) *der die Grundseite senkrecht halbiert,*
b) *der von der Spitze senkrecht zur Grundseite geht (die Höhe des Dreiecks),*	b′) *der die Spitze mit der Mitte der Grundseite verbindet.*

5. Da gleichliegende Strecken durch die Umwendung um die Schnittgerade ihrer Ebene mit der Mittelebene zur Deckung kommen (2 c), so folgt:

a) *Beiderseits gleichliegende Strecken sind einander gleich, somit auch solche Dreiecke, Winkel von Geraden, Vielecke und überhaupt ebene Figuren.*

Sie kommen zur Deckung durch eine Drehung um die Schnittgerade ihrer Ebene mit der Mittelebene.

Im Anschlufs hieran ist noch zu erweisen:

b) *Der Winkel zweier Halbebenen ist gleich dem der andrerseits entsprechenden Halbebenen.*

Sind α und α_1 und β und β_1 solche Ebenen, so entsprechen sich auch deren Schnittgeraden $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ und legt man durch gleichliegende Punkte P und P_1 dieser Schnittgeraden die zu ihnen senkrechten Ebenen ν und ν_1, so entspricht (nach a) der zu $\alpha\beta$ Senkrechten $\alpha\nu$ in α die zu $\alpha_1\beta_1$ Senkrechte $\alpha_1\nu_1$ in α_1; ebenso liegt $\beta\nu$ gegenseits der Senkrechten $\beta_1\nu_1$; daher bilden (nach a) auch diese Geraden gleiche Winkel und diese sind die Ebenenwinkel.

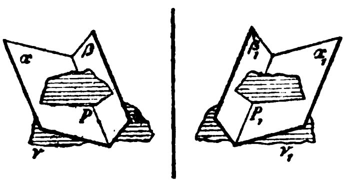


Fig. 32.

6. Es ist ersichtlich, dass in einem gleichschenkeligen Dreikant (Fig. 31) die gegenseits liegenden Teile gegenwendig gleich sind (S. 14, 3). Ebenso bilden (Fig. 33) zwei gegenseits gleichliegende Geraden c

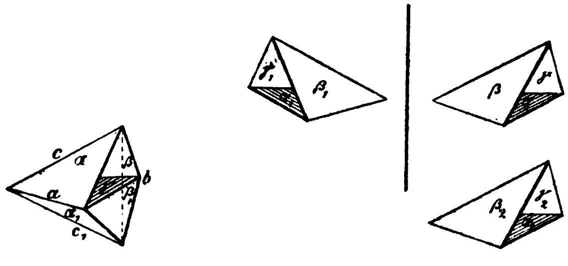


Fig. 33. Fig. 34.

und c_1 mit zwei Geraden a und b der Mittelebene γ zwei entsprechende Dreikante abc und $a_1b_1c_1$, die gegenwendig gleich sind. Überhaupt entspricht einem Dreiflach $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 34) andrerseits der Mittelebene ein gegenwendig gleiches $\alpha_1\beta_1\gamma_1$. Da im Übrigen alle Strecken, Winkel von Geraden und Ebenen beiderseits übereinstimmen, so folgt:

Zwei gegenseits einer Mittelebene gleichliegende Gebilde sind gegenwendig gleich.

§ 12. Beziehungen zwischen den Gebilden gegengesetzter Lage zu Punkt, Gerade oder Ebene.

1. Liegen zwei Gebilde gegengesetzt zu einem Punkt, wie z. B. Dreikant $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ (Fig. 16, S. 15), und läfst man das eine der-

selben um einen Strahl m des Mittelpunkts eine halbe Drehung ausführen, so dreht sich die zur Axe senkrechte Ebene γ in sich selbst um, während irgend ein Strahl $\alpha_1\beta_1$ eines Punktes mit seiner Axenebene $m\,(\alpha_1\beta_1)$ umgewendet wird, so dass dann die Strahlen $\alpha_2\beta_2$ und $\alpha\beta$ auf gleicher Seite von m in der zu γ senkrechten Axenebene liegen; da sie mit der Axe m gleiche Winkel bilden und somit auch mit der Ebene γ, so liegen nun beide Strahlen beiderseits gleich zu der Ebene γ und ebenso irgend ein Punkt des einen Strahls und sein Gegenpunkt infolge der gleichen Abstände vom Mittelpunkt. Da dies für alle gegengesetzte Punkte der ursprünglichen Lage gilt, so folgt:

a) *Wendet man eines von zwei zu einem Mittelpunkt gegengesetzten Gebilden um eine Axe, die durch den Mittelpunkt geht, um, so wird die in diesem Punkt zur Axe senkrechte Ebene Mittelebene für die neue Lage der Gebilde.*

Durch Umkehrung der Bewegung ergiebt sich ebenso:

b) *Wendet man eines von zwei zu einer Mittelebene gleichliegenden Gebilden um eine zu dieser Ebene senkrechte Axe um, so wird der Schnittpunkt der Axe und Ebene der Mittelpunkt für die neue Lage der Gebilde.*

2. In einem Umdrehungskegel kann die Spitze als Mittelpunkt des Doppelkegels gelten. In einem Umdrehungscylinder ist jeder Punkt der Axe Mittelpunkt der Fläche; denn jeder Strahl eines solchen Punktes trifft die Fläche in zwei Punkten gleichen Abstandes von dem Axenpunkt.

3. *In jeder Umdrehungsfläche ist jede Axenebene Mittelebene* (I § 27, 2b).

In einem Umdrehungscylinder ist jede zur Axe senkrechte Ebene Mittelebene.

In einer Kugel ist jeder Durchmesser Axe, jede Ebene durch den Mittelpunkt Mittelebene.

Irgend zwei deckungsfähige Umdrehungsflächen mit je einem Mittelpunkt liegen gegengesetzt zu einem Punkt oder einer Ebene, wenn ihre Axen und Mittelpunkte so liegen.

Drittes Kapitel.

Beziehungen der Kanten- und Ebenenwinkel im Dreikant und Kugeldreieck.

§ 13. Winkel im Dreikant und n-kant.

1. Fällt man in dem Dreikant, dessen Scheitel O und Kanten a, b, c sind, von einem Punkt B der Kante b zu den Geraden a, c und zu der Ebene ac die Senkrechten BA, BC und BF und ist

$\sphericalangle\, ba > bc$, so ist in den rechtwinkeligen Dreiecken OBA und OBC auch $AB > BC$ $(AB = OB \sin ab,\ BC = OB \sin bc)$, und in den Dreiecken BAF und BCF ist

$$\sphericalangle\, BAF < BCF \quad (\sin BAF = BF : AB,\ \sin BCF = BF : BC).$$

Diese Winkel sind aber die Ebenenwinkel des Dreikants. So folgt:

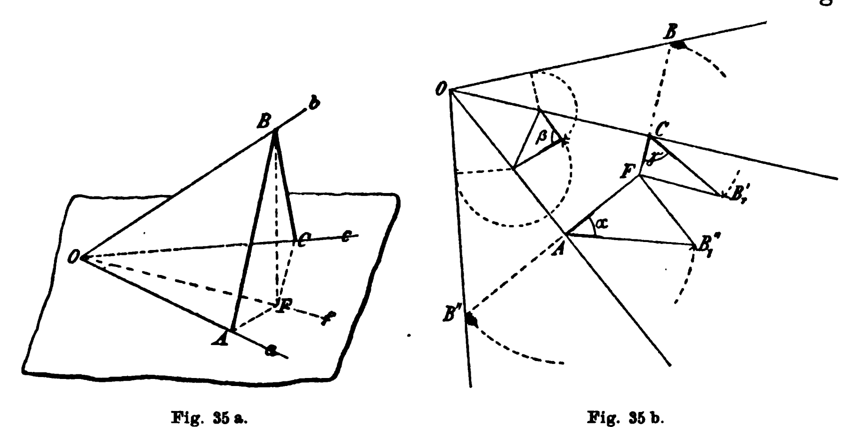


Fig. 35 a. Fig. 35 b.

a) *In einem Dreikant liegt dem größeren Kantenwinkel der größere Ebenenwinkel gegenüber — und umgekehrt.* Oder:

b) *In einem Kugeldreieck liegt der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber — und umgekehrt.*

2. Wie sich an das Dreieck das $n$eck anschließt, so an das Dreikant das n-kant oder die n-kantige Ecke. Sie entsteht, indem ein Halbstrahl eines Punktes S in diesem fest bleibt, während er auf einem Vieleck $ABCDE$ hingleitet, dessen Ebene nicht durch den Punkt geht.

An den Ecken $A, B, C, \ldots$ des $n$ecks bildet die Ebene desselben mit zwei Ebenen des $n$kants ein Dreikant, dessen einer Kantenwinkel α_1 jeweils dem $n$eck angehört; für die Summe σ_1 der beiden andern gilt daher $\sigma_1 > \alpha_1$ (S. 18, 6). Die Summe der Winkel des $n$ecks beträgt $(2n - 4)R$; daher ist die Summe Σ aller dem Vieleck nicht angehörigen Winkel dieser Dreikante $\Sigma > (2n - 4)R$. Die Summe Σ bildet aber mit der Summe S aller Kantenwinkel des $n$kants die Winkel von n Dreiecken, so daß $S + \Sigma = 2nR$, woraus durch Abzählen der $\Sigma > (2n - 4)R$ folgt:

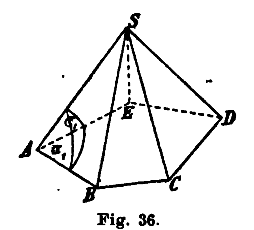


Fig. 36.

$$S < 4R; \quad \text{d. h.:}$$

Die Summe der Kantenwinkel einer jeden Ecke ist kleiner als $4R$.

3. Fällt man von einem Punkt innerhalb eines $n$kants die Senkrechten auf die Ebenen desselben, so bestimmen diese Strecken als

Kanten ein neues $n$kant, welches **Polarecke** zu der ersteren Ecke genannt wird. Aus S. 9, 10 folgt:

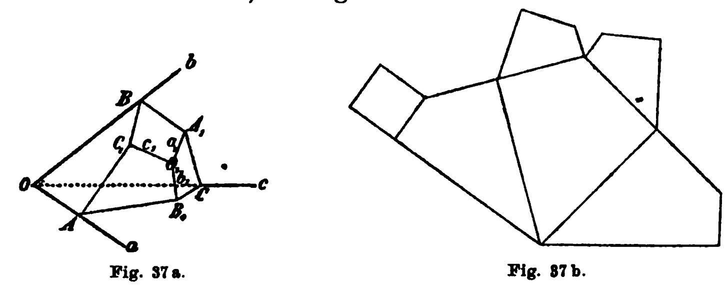


Fig. 37 a. Fig. 37 b.

a) *Jeder Ebenenwinkel einer Ecke ergänzt den entsprechenden Kantenwinkel der Polarecke zu $2R$.*

Da (nach S. 8, 9 b) auch die Kante zweier Ebenen der ursprünglichen Ecke senkrecht zur Ebene zweier entsprechenden Kanten der Polarecke, so ist auch die ursprüngliche Ecke Polarecke ihrer Polarecke und

b) *Jeder Kantenwinkel einer Ecke ergänzt den entsprechenden Ebenenwinkel der Polarecke zu $2R$.*

Ist σ die Summe der n Ebenenwinkel der Ecke, s_1 die der Kantenwinkel der Polarecke, so ist $\sigma + s_1 = 2nR$, $\sigma < 2nR$;

aber: $s_1 < 4R$, $\sigma > (2n - 4)R$, d. h.:

c) *Die Summe der Ebenenwinkel einer n-kantigen Ecke ist kleiner als $2nR$ und gröfser als $(2n - 4)R$.*

Insbesondere gilt für $n = 3$:

d) *Die Summe der Ebenenwinkel eines Dreikants oder die Winkelsumme eines Kugeldreiecks ist kleiner als $6R$ und gröfser als $2R$.*

§ 14. Deckungsfähigkeit der Dreikante und Kugeldreiecke.

1. Wenn zwei Dreikante $O(ABC)$, $O_1(A_1B_1C_1)$ deckungsfähig sind, so stimmen ihre drei Kantenwinkel und ihre drei Ebenenwinkel

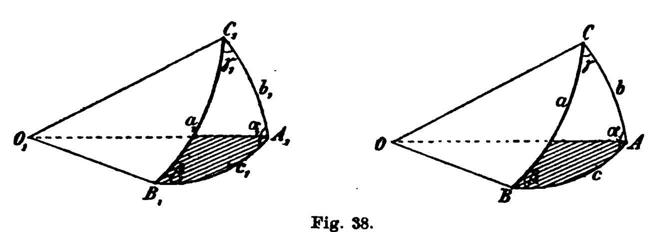


Fig. 38.

in der Gröfse überein und sie erscheinen, von entsprechenden Punkten aus betrachtet, gleichwendig. Sind sie gegenwendig, so sind die Dreikante nicht deckungsfähig, können aber gegengesetzt in Bezug auf einen Punkt oder eine Ebene gelegt werden.

Den deckungsfähigen Ecken entsprechen auf Kugeln, welche um deren Scheitel O und O_1 mit gleichen Halbmessern beschrieben werden, deckungsfähige Kugeldreiecke ABC, $A_1B_1C_1$, in denen die Seiten $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$ und die Gegenwinkel $\sphericalangle A = A_1$, $\sphericalangle B = B_1$, $\sphericalangle C = C_1$.

Indem von den sechs Gleichungen drei als Annahmen herausgegriffen werden, ergeben sich die den Sätzen über die Deckungsfähigkeit ebener Dreiecke entsprechenden Sätze, nämlich:

2. *Zwei Dreikante oder Kugeldreiecke gleicher Kugeln sind deckungsfähig, wenn folgende Stücke der einen Figur gleich und (von entsprechenden Punkten aus gesehen) gleichwendig sind den entsprechenden Stücken der andern,* (wobei wir die Kantenwinkel kurz als Seiten, die Ebenenwinkel als Winkel bezeichnen):

a) *zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel;*

b) *die drei Seiten;*

a') *zwei Winkel und die gemeinsame Seite;*

b') *die drei Winkel;*

In den folgenden Beweisen dieser Sätze ist die gleichwendige Lage der Elemente vorausgesetzt.

a) Es sei $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$, $\sphericalangle b = b_1$, $\sphericalangle c = c_1$. Man bringt den Scheitel O_1 auf O, die Kante O_1A_1 auf OA und die Ebene $O_1A_1B_1$ auf OAB; so folgt aus $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$, dafs Ebene $O_1A_1C_1$ auf OAC fällt, während aus $\sphericalangle b = b_1$ und $c = c_1$ sich ergiebt, dafs O_1C_1 auf OC, O_1B_1 auf OB fällt.

b) Es sei $\sphericalangle a = a_1$, $\sphericalangle b = b_1$, $\sphericalangle c = c_1$. Man lege O_1 auf O, O_1A_1 auf OA und Ebene $O_1A_1B_1$ auf OAB. Würde nun O_1C_1 nicht auf OC, sondern auf OC_2 fallen, so wäre CBC_2 ein gleichschenkeliges Dreieck wegen der Gleichheit von $\sphericalangle a$ und a_1 und ebenso CAC_2, weil $\sphericalangle b = b_1$ ist. Hiernach müfsten OA und OB auf der Mittelebene zu COC_2 liegen; AOB müfste diese Mittelebene sein, was der Annahme widerspricht, dafs beide Ecken gleichwendig einerseits von Ebene AOB liegen.

a') Es sei $\sphericalangle a = a_1$, $\sphericalangle \beta = \beta_1$, $\sphericalangle \gamma = \gamma_1$. Man bringt den Scheitel O_1 auf O, die Kante O_1B_1 auf OB und die Ebene $O_1B_1C_1$ auf OBC; so folgt aus $\sphericalangle a = a_1$, dafs O_1C_1 auf OC fällt, und aus den beiden andern Annahmen, dafs Ebene $O_1B_1A_1$ auf OBA, Ebene $O_1C_1A_1$ auf OCA fällt.

b') Es sei $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$, $\sphericalangle \beta = \beta_1$, $\sphericalangle \gamma = \gamma_1$. Alsdann stimmen in den Polarecken zu O und O_1 die Kantenwinkel überein; diese Polarecken sind somit nach b) einander gleich; sie stimmen folglich in ihren Ebenenwinkeln überein und sonach die Ecken O und O_1 in den Kantenwinkeln. Daher sind diese Ecken nach b) deckungsfähig.

Für b) ergiebt sich auch folgender Beweis: Man zeichnet für die beiden Dreikante, die in den Kantenwinkeln übereinstimmen, die

Senkrechten wie auf S. 33, 1, Fig. 35 angegeben wurde. Dann ergiebt sich, dass der Reihe nach die Figuren OAB, OBC, $AOCF$, ABF und BCF mit den entsprechenden Figuren des zweiten Dreikants übereinstimmen, somit auch die Ebenenwinkel BAF und BCF, woraus die Übereinstimmung nach a) oder a') folgt.

§ 15. Bestimmung der Lage von Punkten zu einem rechtwinkeligen Dreikant. Raumkoordinaten.

1. Wie die Lage eines Punktes in der Ebene durch seine Entfernung von zwei zu einander senkrechten Geraden bestimmt wird (II § 37, 1), so die Lage eines Punktes im Raum durch seine Entfernungen von drei zu einander senkrechten Ebenen, die einander somit in drei zu einander senkrechten Axen OX, OY, OZ schneiden. Legen wir durch den Punkt P drei weitere zu diesen Ebenen parallele Ebenen, so ergeben deren Schnittkanten in $OX = x$, $OY = y$, $OZ = z$ die rechtwinkeligen Koordinaten d. i. die Abstände des Punktes P von den Ebenen YOZ, ZOX, XOY. Die drei Axenebenen teilen den Raum in acht Teile; die auf den Halbaxen eines (des ersten) Teiles gemessenen Koordinaten werden positiv genommen, dagegen die auf den Gegenstrahlen negativ.

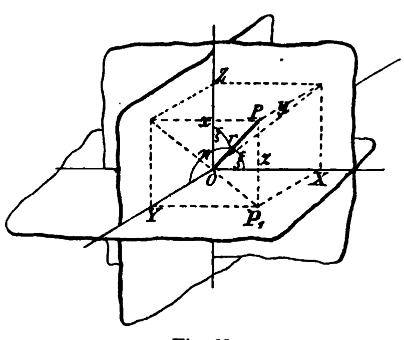


Fig. 39.

Sind ξ, η, ζ die Winkel von OP mit den Axen und $OP = r$, so ist:

$$x = r \cos \xi, \qquad y = r \cos \eta, \qquad z = r \cos \zeta,$$

wobei das Zeichen des cos bestimmt, ob die betreffende Koordinate positiv oder negativ ist.

Ist $PP_1 \perp XOY$, $PP_1 = z$, so gilt für den Grundrifs OP_1 von OP

$$\overline{OP_1}^2 = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad \overline{OP}^2 = \overline{OP_1}^2 + \overline{PP_1}^2 \quad \text{oder}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

woraus weiter folgt:

$$\cos^2 \xi + \cos^2 \eta + \cos^2 \zeta = 1.$$

Zusatz: a) Entsprechend ergiebt sich für eine Strecke ϱ, deren Grenzpunkte die Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 haben,

$$\varrho^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

b) Hieraus folgt weiter, wenn r_1 und r_2 die Strahlen von O nach den Grenzpunkten von ϱ und $\xi_1\eta_1\zeta_1$, $\xi_2\eta_2\zeta_2$ deren Winkel mit den Axen sind:

$$\varrho^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2\,(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$$
$$= r_2^2 + r_1^2 - 2\,r_2r_1\;(\cos\xi_1\cos\xi_2 + \cos\eta_1\cos\eta_2 + \cos\zeta_1\cos\zeta_2).$$

Ist δ der Winkel zwischen r_1 und r_2, so ist aber auch:

$$\varrho^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2\,r_1r_2\cos\delta,$$

also schliefslich:

$$\cos\delta = \cos\xi_1\cos\xi_2 + \cos\eta_1\cos\eta_2 + \cos\zeta_1\cos\zeta_2.$$

c) Die Winkel der Geraden OP mit den drei Axenebenen XOY, XOZ und YOZ ergänzen die Winkel ζ, η, ξ je zu einem R. Daher gilt für diese Winkel α, β, γ:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1,$$

woraus auch folgt:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2.$$

2. Eine zweite Bestimmungsart der Lage eines Punktes, entsprechend den Polarkoordinaten der Ebene (II § 37, 2), ist folgende. Die Lage eines Punktes B wird in Bezug auf einen Punkt O, einen Halbstrahl OX desselben und eine Halbebene XOM des letzteren bestimmt durch 1) die Entfernung des Punktes B von O, $OB = r$, 2) den Winkel dieses Fahrstrahls mit der Axe, $\sphericalangle XOB = c$, und 3) den Winkel α der Ebene BOX mit der Ebene MOX.

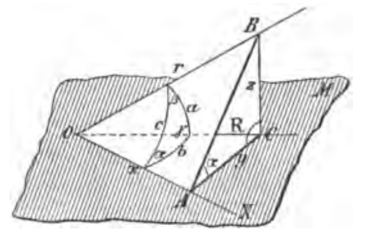


Fig. 40.

Ist die Ebene $BAC \perp OX$, so sind in Bezug auf OX als X-Axe, OXM als XY-Ebene die drei rechtwinkeligen Koordinaten von B: $OA = x$, $AC = y$, $CB = z$ Nun ist

$$x = r\cos c, \qquad y = AB\cos\alpha, \qquad z = AB\sin\alpha$$

oder, da $AB = r\sin c$:

$$x = r\cos c, \qquad y = r\sin c\cos\alpha, \qquad z = r\sin c\sin\alpha.$$

§ 16. Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln im Kugeldreieck. (Sphärische Trigonometrie.)

1. Die drei Halbstrahlen OA, OB, OC (Fig. 40) bilden ein rechtwinkeliges Dreikant, dessen Ebenenwinkel an der Kante OC ein R ist. Bringen wir die Kantenwinkel $\sphericalangle BOC = a$ und $\sphericalangle COA = b$

in Rechnung, so gehört jede der drei Koordinaten x, y, z zwei rechtwinkeligen Dreiecken an; dies führt uns zu Gleichungen zwischen den Kanten- und Ebenenwinkeln.

a) $x = OA$ ist die Seite von AOB und AOC, also:

$$x = r \cos c = OC \cos b = r \cos a \cos b, \qquad \text{woraus:}$$

I. $$\mathbf{\cos c = \cos a \cos b.}$$

b) $z = BC$ ist Seite von OBC und ABC, also:

$$z = r \sin a = AB \cdot \sin \alpha = r \sin c \sin \alpha, \qquad \text{woraus:}$$

II. $$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}.$$

c) $y = AC$ ist Seite von ABC und AOC, also:

$$y = r \sin c \cos \alpha = OC \sin b = r \cos a \sin b,$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos a \sin b}{\sin c}, \qquad \text{und da} \qquad \cos a = \frac{\cos c}{\cos b}$$

gesetzt werden kann, so ergiebt sich schliefslich:

III. $$\cos \alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}.$$

Dem Dreikant OA, OB, OC entspricht auf einer um O gelegten Kugel ein rechtwinkeliges Kugeldreieck mit den Seiten a, b, c (Kantenwinkel) und den Winkeln α, β, R (Ebenenwinkel). Nennen wir a und b die Katheten, c die Hypotenuse des Kugeldreiecks, so entsprechen obige Formeln dem Satze:

Im rechtwinkeligen Kugeldreieck ist:

a) *der Cosinus der Hypotenuse gleich dem Produkt der Cosinus der beiden Katheten.*

b) *der Sinus eines Winkels gleich dem Quotient des Sinus der Gegenkathete durch den Sinus der Hypotenuse.*

c) *der Cosinus eines Winkels gleich dem Quotient der Tangens der Ankathete durch die Tangens der Hypotenuse.*

2. Ziehen wir in einem beliebigen Dreikant, dessen Kantenwinkel $\sphericalangle BOC = a$, $\sphericalangle COA = b$, $\sphericalangle AOB = c$ sind, von einem Punkt B der einen Kante Senkrechte sowohl auf die beiden andern Kanten, $BA \perp OA$, $BC \perp OC$, als auf die Gegenebene, $BF \perp AOC$, so bestimmen die Winkel

$$\sphericalangle BAF = \alpha \text{ und } \sphericalangle BCF = \gamma$$

zwei Ebenenwinkel des Dreikants. Ist $OB = r$, so ist

$$BA = r \sin c, \qquad BC = r \sin a.$$

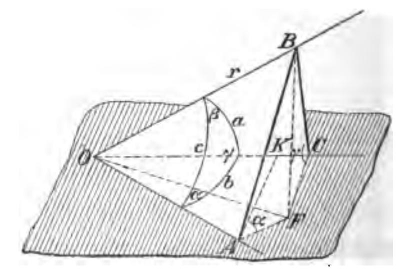


Fig. 41.

Die dritte Senkrechte BF gehört den beiden Dreiecken ABF und CBF an, woraus folgt:

$$BF = BA \sin\alpha = r \sin c \sin\alpha, \quad BF = BC \sin\gamma = r \sin a \sin\gamma,$$

$$\sin c \cdot \sin\alpha = \sin a \cdot \sin\gamma$$

oder

IV. $$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin a}{\sin c}.$$

In einem Kugeldreieck ist das Verhältnis der Sinus zweier Winkel gleich dem Verhältnis der Sinus der Gegenseiten.

3. Die Strecke $OC = r \cos a$ zerfällt durch $AK \parallel FC$ in zwei Teile $OK + KC$. Nun ist $\sphericalangle KAF = R - KAO = b$, $KC = AF \sin b$, $OK = OA \cos b$, wobei $AF = AB \cos\alpha = r \sin c \cos\alpha$ und $OA = r \cos c$. Daraus folgt: $r \cos a = r \cos c \cos b + r \sin c \cos\alpha \sin b$ oder:

V. $$\mathbf{\cos a = \cos\alpha \sin b \sin c + \cos b \cos c.}$$

Dies ist die Cosinus-Formel für die Seite.

Zusatz. Ist $\alpha > R$, so ist der Winkel von AF mit $OC = (b + 90^0)$. Da AF positiv zu nehmen, so ist $AF = -AB \cos\alpha = -r \sin c \cdot \cos\alpha$, und der zugehörige Abschnitt auf OC ist

$AF \cos(b + 90^0) = -AF \sin b = r \sin b \sin c \cos\alpha$, wie oben.

Ist $c > R$, so ist $OA = -r \cos c$, und es macht OA mit OC den Winkel $(b + 180^0)$; daher ist der Abschnitt auf OC:

$$-r \cos c \cos(b + 180^0) = r \cos b \cdot \cos c, \quad \text{wie oben.}$$

Ist $a > R$, so fällt der Grundriſs von OB auf die Gegenrichtung des Strahles des Dreikantes; es ist daher in der vorhergehenden Ableitung überall $(b + 180^0)$ für b zu setzen, wobei alle Glieder ihre Zeichen ändern, somit die Gleichung dieselbe bleibt.

4. Um die der Formel V entsprechende Gleichung für die Winkel des Kugeldreiecks zu erhalten, nehmen wir die Polarecke des Dreikants zu Hilfe, in welchem die Kantenwinkel $2R - \alpha$, $2R - \beta$, $2R - \gamma$, die Ebenenwinkel $2R - a$, $2R - b$, $2R - c$ sind. Daher ist nach V:

$$\cos(2R - \alpha) = \cos(2R - a) \sin(2R - \beta) \sin(2R - \gamma) + \\ + \cos(2R - \beta) \cos(2R - \gamma),$$

$$-\cos\alpha = -\cos a \sin\beta \sin\gamma + \cos\beta \cos\gamma,$$

VI. $$\mathbf{\cos\alpha = \cos a \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta \cos\gamma.}$$

Dies ist die Cosinus-Formel für den Winkel.

§ 17. Berechnung der Seiten und Winkel des Kugeldreiecks.

A. Das rechtwinkelige Dreieck.

1. Für das rechtwinkelige Dreieck ergeben sich Formeln, indem man in denen des schiefwinkeligen Dreiecks $\gamma = R$, also

$$\sin\gamma = 1 \quad \text{und} \quad \cos\gamma = 0 \quad \text{setzt.}$$

a) Aus $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin a}{\sin c}$ folgt $\sin a = \sin\alpha \sin c$, ebenso $\sin b = \sin\beta \sin c$.

b) Aus $\cos c = \cos\gamma \sin a \sin b + \cos a \cos b$ folgt $\cos c = \cos a \cos b$.

c) Aus $\cos\gamma = \cos c \sin\alpha \sin\beta - \cos\alpha \cos\beta$ folgt

$$\cos c = \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta.$$

d) Aus $\cos\alpha = \cos a \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta \cos\gamma$ folgt

$$\cos\alpha = \cos a \sin\beta, \text{ ebenso } \cos\beta = \cos b \sin\alpha.$$

e) Setzt man hier die Werte aus b) und a) ein, so folgt

$$\cos\alpha = \frac{\cos c}{\cos b} \cdot \frac{\sin b}{\sin c}, \quad \cos\alpha = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} c, \quad \cos\beta = \operatorname{tg} a \operatorname{cotg} c.$$

f) Aus d) folgt ferner $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cos a \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \cos a \frac{\sin b}{\sin a}$,

$$\sin b = \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{tg} a, \qquad \sin a = \operatorname{cotg}\beta \operatorname{tg} b.$$

Wenn von den fünf auf einander folgenden Gröfsen a, b, α, c, β zwei gegeben sind, so können die andern berechnet werden. Von drei Stücken, den beiden gegebenen und dem gesuchten, wird immer eines so liegen, dafs es (bei Nichtbeachten des R) entweder von den beiden andern in der Ordnung $a, b, \alpha, c, \beta, a, b$ unmittelbar eingeschlossen wird, oder so, dafs es nicht unmittelbar an die beiden andern angrenzt. Für dieses Stück kann man sofort eine der obigen Formeln anschreiben nach folgender Regel von Neper (1614):

Im rechtwinkeligen Kugeldreieck ist der Cosinus eines Stückes gleich dem Produkt

a) *der Contangenten der einschliefsenden Stücke,*

b) *der Sinus der nicht angrenzenden Stücke,*

wobei jedoch für jede Kathete statt der hierdurch bestimmten Funktion die Cofunktion zu setzen ist.

B. Das schiefwinkelige Dreieck.

2. Es seien die drei Seiten a, b, c gegeben. Die Formel V liefert:

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

2'. Es seien die drei Winkel α, β, γ gegeben. Die Formel VI giebt:

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta \cos\gamma}{\sin\beta \sin\gamma}.$$

Zusatz. Für logarithmische Rechnung geeignete Formeln ergeben sich durch Berechnung von

$$\sin\frac{\alpha}{2}, \quad \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\frac{a}{2}, \quad \cos\frac{a}{2}$$

nach den Formeln Teil II § 39, VII, V und VIII, wobei wir setzen:

$$\frac{1}{2}(a+b+c)=s, \qquad s-a=s_1,\ s-b=s_2,\ s-c=s_3,$$

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=\sigma, \qquad \sigma-\alpha=\sigma_1,\ \sigma-\beta=\sigma_2,\ \sigma-\gamma=\sigma_3.$$

Es folgt so:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin s_2 \sin s_3}{\sin b \sin c}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin s \sin s_1}{\sin b \sin c}}$$

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma \cos\sigma_1}{\sin\beta \sin\gamma}} \qquad \cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos\sigma_2 \cos\sigma_3}{\sin\beta \sin\gamma}}.$$

(Vgl. II § 43, 6.) Die Gleichungen rechts können aus denen links auch mittels der Polarecke abgeleitet werden.

Durch Teilung folgt:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin s_2 \sin s_3}{\sin s \sin s_1}}. \qquad \operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma \cos\sigma_1}{\cos\sigma_2 \cos\sigma_3}}.$$

3. Es seien zwei Seiten a und b und der eingeschlossene Winkel γ gegeben. Die Formel V giebt durch fortlaufende Vertauschung:

$$\cos c=\cos\gamma \sin a \sin b+\cos a \cos b.$$

3'. Es seien zwei Winkel α und β und die anliegende Seite c gegeben. Die Formel VI liefert:

$$\cos\gamma=\cos c \sin\alpha \sin\beta-\cos\alpha \cos\beta.$$

Die übrigen Stücke folgen dann nach Formel IV:

$$\sin\alpha=\sin\gamma\cdot\frac{\sin a}{\sin c}. \qquad \sin a=\sin c\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Zusatz. a) Bestimmen wir φ so, dafs

$$\cos\gamma \operatorname{tg} a=\operatorname{tg}\varphi,$$

so folgt:

$$\cos c=\frac{\cos a}{\cos\varphi}(\sin b \sin\varphi+\cos b \cos\varphi),$$

$$\cos c=\frac{\cos a \cos(b-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

a') Bestimmen wir φ so, dafs

$$\cos c \operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\varphi,$$

so folgt:

$$\cos\gamma=\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}(\sin\beta \sin\varphi-\cos\beta \cos\varphi),$$

$$\cos\gamma=-\frac{\cos\alpha \cos(\beta+\varphi)}{\cos\varphi}.$$

b) Um Formeln zu erhalten, die die unmittelbare Berechnung von α und β, oder von a und b gestatten, setzen wir in den Formeln

$$\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\pm\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2},$$

$$\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\mp\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

rechts die Werte aus 2, Zus. ein und benutzen die Formeln II § 39, VIII. Es folgt so z. B.

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sin s_2+\sin s_1}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin s\,\sin s_3}{\sin a\,\sin b}}=\frac{2\sin\frac{s_1+s_2}{2}\cos\frac{s_2-s_1}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$$

So erhält man die Formeln von Delambre (1807), die noch häufig nach Mollweide (1808) oder Gaufs (1809) benannt werden:

$$\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}},\qquad \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}},\qquad \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Um diese Formeln sofort anschreiben zu können, beachte man, dafs ein Ausdruck für die Seiten im Zähler und Nenner dieselbe Funktion hat, und dafs der entsprechende Ausdruck der Winkel gefunden wird, indem man im Zähler dem Sinus das minus, dem Cosinus das plus gegenüberstellt und umgekehrt dem minus den Sinus, dem plus den Cosinus; im Nenner steht bei den Winkeln die Kofunktion der Funktion des Zählers.

Für die Berechnung der Winkel und Seiten folgen durch Teilung der entsprechenden Formeln die sog. Neper'schen Analogien (1619):

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2},\qquad \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2},\qquad \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

Zur Berechnung von c und γ können dann die Formeln von Delambre benutzt werden.

Wenn z. B. α, β und c gegeben, so entspricht der Berechnung von a, b und γ folgende Anordnung, welche derjenigen im II. Teil § 44, 3e nachgebildet ist:

I.	$\lg\sin\frac{c}{2}$	$\lg\cos\frac{c}{2}$	
II.	$\lg\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\lg\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$	
III.	$\lg\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\lg\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$	
IV = (I + II).	$\lg\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{a+b}{2}$	$\lg\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{a+b}{2}$	$\lg\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}$
V = (I + III).	$\lg\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$	$\lg\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$	$\lg\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}$
VI.	$\lg\sin\frac{a+b}{2}$	$\lg\cos\frac{a+b}{2}$	
VII = (IV—VI).	$\lg\sin\frac{\gamma}{2}$	$\lg\sin\frac{\gamma}{2}$	

4. Es seien zwei Seiten a und b gegeben und der Gegenwinkel der ersteren α. Die Formel IV

$$\sin\beta = \sin\alpha\cdot\frac{\sin b}{\sin a}$$

4'. Es seien zwei Winkel α und β und die Gegenseite des ersteren a gegeben. Die Formel IV

$$\sin b = \sin a\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

ergiebt im allgemeinen zwei Winkel, die einander zu $2R$ ergänzen.

Die Seite c ist unmittelbar aus der Gleichung

$$\cos a = \cos\alpha\sin b\sin c + \cos b\cos c$$

Der Winkel γ ist unmittelbar aus der Gleichung

$$\cos\alpha = \cos a\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma$$

nach der im II. Teil § 41, 3c erläuterten Weise zu berechnen.

Zusatz. Aus den Neper'schen Analogien folgen ebenfalls die übrigen Stücke, wenn eines berechnet ist.

Da in den umgeformten Gleichungen von Delambre:

$$\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}} = \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{c}{2}},\qquad \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

die rechten Seiten stets positiv sind, so entsprechen einander die Werte:

$$\alpha \gtreqless \beta \text{ und } a \gtreqless b, \qquad \alpha+\beta \gtreqless 2R \text{ und } a+b \gtreqless 2R.$$

Diese Beziehungen sind bei Bestimmung der fraglichen Gröfsen wohl zu berücksichtigen.

II. Abschnitt.

Ähnliche Abbildung und körperliche Gebilde.

Viertes Kapitel.

Parallelbestrahlung, Bestrahlung paralleler Ebenen von einem Punkt und die entsprechenden Körperformen.

§ 18. Abbildung durch parallele Bestrahlung.

1. Aus der Gleichheit der Parallelstrahlstrecken zwischen parallelen Ebenen ergiebt sich (gemäfs S. 9, 1):

a) *Parallele Strahlen durch die Punkte einer ebenen Figur bestimmen auf einer parallelen Ebene ein Bild, das mit der Figur durch Verschiebung längs einer Strahlstrecke zur Deckung gebracht werden kann.*

Für diese Abbildung gilt:

b) *Der Verbindungsgeraden zweier Punkte der einen Figur entspricht im Bild die Verbindungsgerade der Bilder dieser Punkte. Beide Geraden sind parallel.*

Sie sind nämlich die Schnittgeraden beider Ebenen mit der Parallelstrahlen-Ebene beider Punktpaare.

b') *Dem Schnittpunkt zweier Geraden der einen Figur entspricht im Bild der Schnittpunkt der Bilder dieser Geraden. Beide Punkte liegen auf einem Parallelstrahl.*

Dieser Strahl ist nämlich die Schnittgerade der Parallelstrahlen-Ebene durch beide Geradenpaare.

c) *Zwei deckungsfähige ebene Figuren liegen parallel bestrahlt (perspektiv kongruent) auf zwei parallelen Ebenen, wenn zwei Halbstrahlen eines Punktes der einen Figur mit den entsprechenden Halbstrahlen der andern Figur gleichgerichtet parallel sind.*

Die gleiche und gleichgerichtete Lage zweier Figuren einer einzigen Ebene (I § 21) kann als besonderer Fall hiervon aufgefafst werden, nämlich als die Grenzlage zweier unbeschränkt nahe gerückten parallelen Ebenen.

2. *Die Abbildung einer ebenen Figur durch parallele Bestrahlung auf einer nicht parallelen Ebene* unterscheidet sich von der auf einer parallelen Ebene dadurch, dafs *die entsprechenden Geraden* nicht parallel sind,

sondern *sich auf einer Geraden, der sog. Bildaxe, schneiden,* nämlich auf der Schnittgeraden der Ebenen der Vorlage und des Bildes. Es folgt dies daraus, daſs eine Gerade, ihr Bild und die Bildaxe die drei Schnittgeraden dreier Ebenen sind, nämlich der Strahlenebene, der Vorlage- und der Bildebene. (Weiteres bei den Aufgaben.)

Dieser Art der Abbildung entspricht eine Abbildung in einer einzigen Ebene unter der Bedingung, daſs die Strahlen parallel sind und daſs eine Gerade ihr Bild in einer bestimmten Geraden schneidet. Man nennt diese Art der Abbildung affin oder verwandt (II § 3, 5).

3. Werden zwei vollkommen übereinstimmende räumliche Gebilde so aufgestellt, daſs ein Halbstrahl und eine Halbebene desselben in dem einen Gebilde gleichgerichtet parallel zu denen des andern Gebildes sind und daſs die entsprechenden anschlieſsenden Ebenenwinkel gleichwendig sind, so bringt die Verschiebung um die Strecke beider Strahlpunkte das eine Gebilde auf das andere. Es kann das eine körperliche Gebilde als eine *Nachbildung* des andern aufgefaſst werden, die man dadurch erhält, daſs man durch alle Punkte des ersteren Gebildes parallele und gleiche Strahlstrecken zieht, deren Endpunkte das mit ersterem *gleiche und gleichgerichtete (perspektiv kongruente) räumliche Gebilde* bestimmen.

§ 19. Prisma und Cylinder.

1. Die Fläche eines n ecks und die ihres parallel bestrahlten Bildes auf einer parallelen Ebene schlieſsen mit den Strahlenebenen einen körperlichen Raum ein, der als n-kantige Säule oder n-kantiges Prisma bezeichnet wird. Die Flächen der Vielecke heiſsen Grundflächen (oder Grundfläche und Deckfläche), die Strahlstrecken der Ecken Seitenkanten und die ebenen Parallelstreifen zwischen ihnen Seitenflächen.

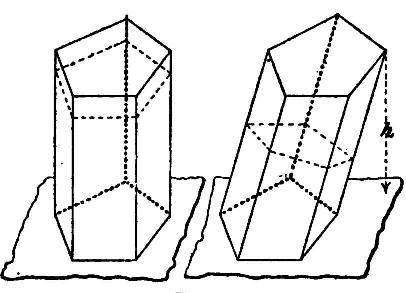


Fig. 42.

Die Gesamtheit der Seitenflächen wird Mantel des Prismas genannt. Die Grundflächen und der Mantel bilden zusammen die Oberfläche des Prismas. Der Abstand der Grundflächen heiſst Höhe des Prismas.

Aus der Entstehungsart folgt:

a) *Die Grundflächen eines Prismas und jede mit ihnen parallele Schnittfläche stimmen vollkommen überein.*

b) *Die Seitenflächen eines Prismas sind Parallelogramme; ebenso ist jede Schnittfläche parallel einer Seitenkante ein Parallelogramm.*

Das Prisma heiſst ein gerades oder schiefes, jenachdem die Seitenkanten auf der Grundfläche senkrecht stehen oder nicht. Im

ersteren sind die Seitenflächen Rechtecke. Die Schnittebene, die in einem schiefen Prisma senkrecht auf den Seitenkanten ist, heifst Querschnitt.

Das gerade Prisma heifst regelmäfsig, wenn seine Grundflächen regelmäfsige Vielecke sind.

Haben die Grundflächen je einen Mittelpunkt, so heifst die Verbindungsgerade der Mittelpunkte Axe des Prismas.

Ist die Grundfläche eines Prismas ein Parallelogramm, so ist der Körper von drei Paaren paarweise übereinstimmender Parallelogramme begrenzt und wird Parallelflach (Parallelepipedon) genannt; jede Fläche desselben kann als Grundfläche aufgefafst werden. Sind drei an einer Ecke desselben zusammenstofsende Kanten senkrecht zu einander, so heifst es ein Quader, und sind zugleich diese drei Kanten einander gleich, so heifst es Würfel; dieser ist von sechs Quadraten begrenzt. Sind die drei Kanten einer Ecke an einem schiefen Parallelflach einander gleich und ebenso deren Winkel, so heifst der Körper Rautenflach oder Rhomboëder.

2. Wenn eine krumme Linie von Parallelen bestrahlt wird, so bildet die Gesamtheit der Strahlen eine cylindrische Fläche (Fig. 43). Wir verstehen hier jedoch immer nur eine solche Fläche unter diesem Namen, deren Leitlinie ein Kreis ist. Wird die cylindrische Fläche von zwei parallelen Ebenen begrenzt, so heifst der von diesen Flächen eingeschlossene Raum Cylinder oder Rundsäule (Walze). Wie der Kreis als Grenzfigur eines Vielecks, so kann der Cylinder als besondere Art einer n-kantigen Säule betrachtet werden. Daher gilt von ihm, was oben vom Prisma ausgesagt wurde. Statt der Seitenkanten hat der Cylinder Seitengeraden.

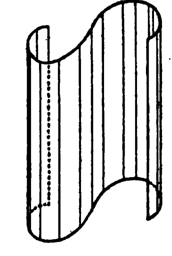


Fig. 43.

Im geraden Cylinder ist die Grundfläche ein Kreis und die Seitengerade senkrecht zu ihr; der Mantel des geraden Cylinders ist ein Teil der Fläche eines Umdrehungscylinders. Im schiefen Cylinder ist die Seitengerade gegen die Grundfläche geneigt. Wird ein Umdrehungscylinder von zwei zu den Seitengeraden geneigten, parallelen Ebenen begrenzt, so entsteht ein schiefer Cylinder mit kreisförmigem Querschnitt und elliptischen Grundflächen.

Axe des Cylinders heifst die durch den Mittelpunkt des Kreises parallel zu den Seitengeraden gezogene Gerade; eine durch die Axe gelegte Ebene heifst Axenschnitt, und wenn sie senkrecht zur Grundfläche ist, heifst sie Hauptaxenschnitt.

3. Die Rechtecke, die den Mantel eines geraden Prismas bilden, lassen sich in eine Ebene so abwickeln, dafs sie zusammen ein einziges Rechteck bilden. Das gleiche gilt von dem Mantel des

geraden Cylinders, da er als besonderer Fall des geraden Prismas aufzufassen ist. Der Umfang der Grundfläche bildet die eine Seite des Rechtecks, die Seitenkante oder Seitenstrecke die zweite Seite. Daher gilt für den Flächeninhalt dieses Mantels:

Der Mantel eines geraden Prismas oder Cylinders ist gleich dem Produkt aus dem Umfang der Grundfläche und einer Seitenkante oder Seitenstrecke.

Zusatz: a) Ist a die Grundkante einer regelmäfsigen n-kantigen Säule und s die Seitenkante, so ist die gesamte Oberfläche derselben

$$= na\left[s + \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{2R}{n}\right].$$

b) Die Oberfläche eines Quaders, dessen Kanten a, b, c sind, ist $2(ab + ac + bc)$; die des Würfels mit der Kante a ist $6a^2$.

c) Der **Mantel eines geraden Cylinders ist** $= 2\pi rs$ (wenn der Halbmesser r und die Seitenstrecke s), die Oberfläche $2\pi r(r + s)$.

d) Wird von dem Cylinder durch eine der Axe parallele Ebene ein Abschnitt weggenommen, dessen Grundfläche ein Kreisabschnitt mit der Sehne a ist, so ist die Oberfläche dieses Cylinderabschnittes

$$as + sr \operatorname{arc}\beta + r^2(\operatorname{arc}\beta - \sin\beta), \quad \text{wobei} \quad \sin\frac{\beta}{2} = \frac{a}{2r}.$$

4. In einem schiefen Prisma oder schiefen Cylinder ist ein Querschnitt f_1 zugleich der Grundrifs der Grundfläche f auf der Ebene des Querschnitts. Bilden beide Ebenen den Winkel α, so ist $f_1 = f\cos\alpha$, also $f = \frac{f_1}{\cos\alpha}$ (S. 13, 7).

Ist der Querschnitt ein Kreis mit dem Halbmesser b, die Grundfläche eine Ellipse, in welcher der zur Schnittgeraden beider Ebenen senkrechte Axenschnitt die Ellipsenaxe $2a$ ergiebt, so ist $2b = 2a\cos\alpha$ und die Fläche ε der Ellipse: $\varepsilon = \frac{\pi b^2}{\cos\alpha} = \pi ab$. Nun ist auch $2b$ gleich der auf der Mitte der Hauptaxe senkrechten Sehne der Ellipse, da diese der Querschnittfläche parallel ist; a und b heifsen die Halbaxen der Ellipse. Daher folgt:

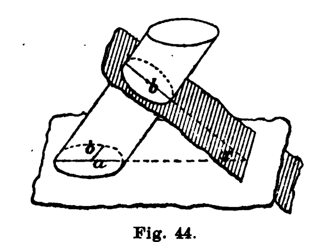


Fig. 44.

Der Flächeninhalt einer Ellipse ist gleich dem Produkt von π und den beiden Halbaxen.

5. Wird der Mantel eines schiefen Prismas abgewickelt, so werden die Seiten eines Querschnitts n_1, n_2, n_3, ... zusammen auf eine Gerade fallen, da sie senkrecht zu den untereinander parallelen Seitengeraden sind. Die Seitenflächen sind dann Parallelogramme, die in einer Seite s übereinstimmen, während die zu diesen Seiten gehörigen Höhen n_1, n_2, n_3, ... sind. Daher ist der Mantel

$$s(n_1 + n_2 + n_3 + \cdots).$$

Hiermit ist bewiesen:

Der Mantel eines schiefen Prismas oder Cylinders ist gleich dem Produkt des Umfangs eines Querschnitts mit einer Seitenkante oder Seitenstrecke.

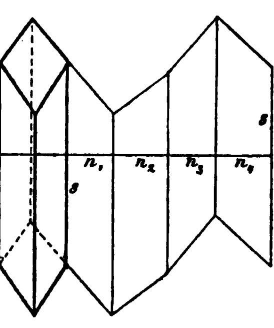


Fig. 45.

Zusatz. a) Ist der Querschnitt ein regelmäfsiges $n$eck mit der Seite a, ist die Seitenkante s und ist der Winkel der Grundfläche mit dem Querschnitt α, so ist die Oberfläche $na \cdot \left[s + \frac{a}{2\cos\alpha} \cdot \operatorname{cotg} \frac{2R}{n}\right]$.

b) Ist der Querschnitt eines schiefen Cylinders ein Kreis mit dem Halbmesser b, ist s die Seitengerade und a die grofse Halbaxe der Grundfläche, so ist die Oberfläche $= 2\pi b\,(a + s)$.

6. Die Fläche eines $n$ecks oder Kreises und die des parallel bestrahlten Bildes auf einer nicht parallelen Ebene schliefsen mit den Strahlenebenen einen körperlichen Raum ein, der ein schiefabgeschnittenes Prisma oder ein schiefabgeschnittener Cylinder genannt wird.

Es sei das Vieleck ein $2n$eck mit einem Mittelpunkt, die Seiten eines Querschnitts seien $a_1, a_2, \cdots a_n, a_1, a_2, \cdots a_n$, und die Seitenkanten seien $s_1, s_2, \cdots s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \cdots s_{2n}$. Dann ist der Mantel zusammengesetzt aus $2n$ Trapezen, bei denen die Summe der Flächen zweier gegenüberliegenden den Wert ergiebt:

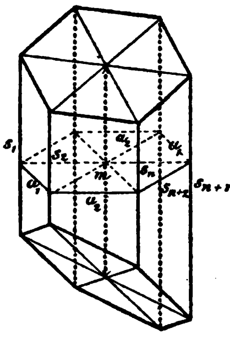


Fig. 46.

$$a_1 \cdot \frac{s_1 + s_2}{2} + a_1 \frac{s_{n+1} + s_{n+2}}{2}$$

$= \frac{a_1}{2}\,[s_1 + s_{n+1} + s_2 + s_{n+2}]$. Nun ist aber die Axe m Mittelparallele zu den Gegenseiten s_1 und s_{n+1}, s_2 und s_{n+2}, somit $s_1 + s_{n+1} = 2m = s_2 + s_{n+2}$; daher ist der Inhalt beider Trapeze $\frac{a_1}{2} \cdot 4m = 2a_1 m$. Ebenso folgt für ein zweites Paar gegenüberliegender Trapeze $2a_2 m$ u. s. w., daher ist der Mantel $(2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_n)m = u \cdot m$, wenn mit u der Umfang des Querschnitts bezeichnet wird. D. h.:

Der Mantel eines schiefabgeschnittenen Prismas mit einer Axe oder der Mantel eines solchen Cylinders ist gleich dem Produkt seiner Axe und des Querschnittumfangs.

§ 20. Ähnliche Abbildung durch Bestrahlung von einem Punkt.

1. a) *Wenn eine ebene Figur von einem Punkt aus bestrahlt wird, so bestimmen die Strahlen auf einer parallelen Ebene eine ähnliche Figur.*

Es gilt nämlich für diese Figuren (entsprechend II § 3, 4 a und § 12, 2):

b) *Jeder Geraden der einen Figur entspricht als Bild eine parallele Gerade der andern Figur*; beide Geraden sind die Schnittgeraden ihrer Strahlenebene mit der Ebene der Vorlage und des Bildes.

c) *Beide Figuren stimmen in den entsprechenden Winkeln und im Verhältnis entsprechender Strecken überein* — das erstere folgt aus b); das Verhältnis der Strecken ist gleich dem der Strahlstrecken, da sich hier Zweistrahl an Zweistrahl reiht.

Der Strahlpunkt heifst auch hier Ähnlichkeitspunkt.

Wie für die parallele Bestrahlung (S. 44) gilt auch hier:

d) *Der Verbindungsgeraden zweier Punkte der einen Figur entspricht als Bild die Verbindungsgerade der Bilder dieser Punkte; beide Geraden sind parallel.*

d') *Dem Schnittpunkt zweier Geraden der einen Figur entspricht als Bild der Schnittpunkt der Bilder dieser Geraden; beide Punkte liegen auf einem Ähnlichkeitsstrahl.*

2. Zwei ähnlich liegende Figuren einer Ebene (II § 3, 4 a und 3. Kap.) können als ein besonderer Fall der bestrahlten Lage auf zwei parallelen Ebenen aufgefafst werden.

Letztere Lage geht nämlich in erstere über, indem die eine Ebene der andern unbeschränkt näher rückt. Daher stimmen auch die Sätze über die beiden Arten der Lage überein. Die Beweise für den allgemeinen Fall sind hierbei oft anschaulicher als für den besonderen, z. B.:

Zwei Dreiecke, deren Seiten paarweise parallel sind, liegen von einem Punkt bestrahlt, d. h. wenn die Seiten von ABC (Fig. 47 a) der Reihe

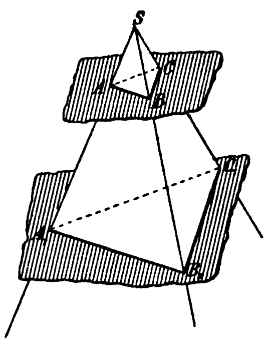


Fig. 47 a.

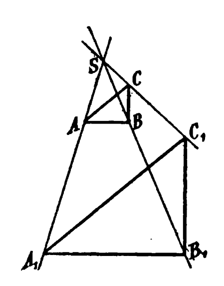


Fig. 47 b.

nach parallel den Seiten von $A_1B_1C_1$ sind, so müssen einander die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 in einem Punkt schneiden; denn die drei Ebenen

ABA_1B_1, BCB_1C_1, CAC_1A_1 schneiden einander in diesen Geraden, und die Schnittgeraden dreier Ebenen gehen durch einen Punkt. Dafs dieser Satz nun auch für den Fall, da beide Dreiecke in einer Ebene liegen (Fig. 47 b), seine Geltung behält, folgt daraus, dafs man diesen Fall als Grenzlage auffassen kann, die sich von dem Fall zweier unbeschränkt nahe gerückten parallelen Ebenen nicht unterscheiden läfst.

3. Man unterscheidet je nach der Lage des Ä.-Punktes aufser oder zwischen den entsprechenden Gebilden einen äufseren oder inneren Ähnlichkeitspunkt. Bei jenem sind entsprechende Halbstrahlen gleichgerichtet, bei diesem gegengerichtet.

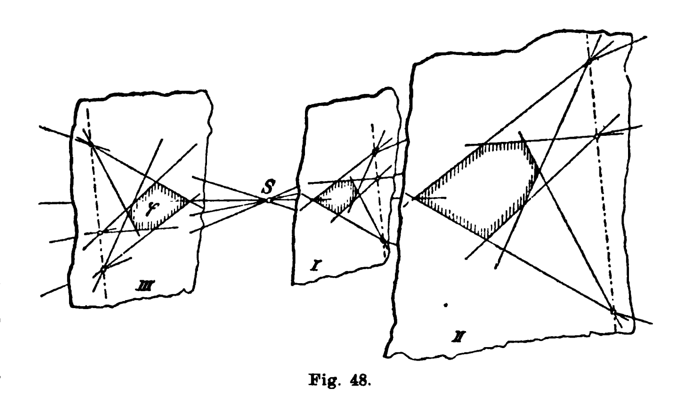


Fig. 48.

Zeichnet man noch bei einem inneren Ä.-Pkt. zweier ebenen Figuren zu der einen die gegengesetzte Figur zum Ä.-Punkt als Mittelpunkt, so ist diese Figur deckungsfähig mit jener (§ 6, 1d), und der Ä.-Punkt ist ein äufserer geworden.

Zwei ebene ähnliche Figuren können sowohl so gelegt werden, dafs sie einen äufseren Ä.-Punkt haben, als auch so, dafs sie einen inneren haben.

4. *Zwei körperliche Gebilde heifsen ähnlich und ähnlich liegend, wenn ihre Punkte paarweise auf je einem Strahl eines Strahlpunktes liegen und die Strahlstrecken je zweier solcher Punktpaare in dem gleichen unveränderlichen Verhältnis stehen.*

Es ergiebt sich hieraus sofort:

a) *In ähnlich liegenden Gebilden entspricht jeder Geraden und Ebene eine parallele Gerade und Ebene. Entsprechende Geraden- und Ebenen-Winkel sind einander gleich. Entsprechende Strecken stehen in gleichem Verhältnis, dem Verhältnis der Strahlstrecken.*

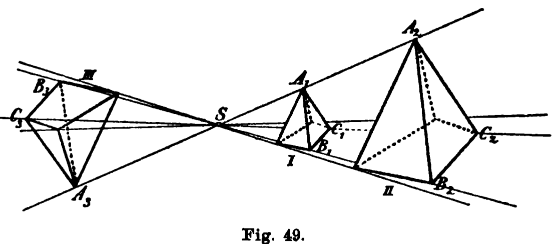


Fig. 49.

b) *Bei äufserem Ä.-Punkt sind die entsprechenden Halbstrahlen und Halbebenen gleichgerichtet parallel, die Dreikante deckungsfähig, die Gebilde gleichwendig ähnlich. Bei innerem Ä.-Punkt sind die Halbstrahlen und Halb-*

ebenen gegengerichtet parallel, die Dreikante gegenwendig gleich, die Gebilde gegenwendig ähnlich.

Dem ersten Fall entspricht die gleichgerichtete Lage deckungsfähiger Gebilde (§ 18, 3), wenn nämlich der Strahlpunkt in unendliche Entfernung hinausrückt. Dem letzteren Fall entspricht die gegengesetzte Lage in Bezug auf einen Punkt, indem der Strahlpunkt zum Mittelpunkt wird (§ 6).

Vergleiche eine grofse rechte und kleine linke Hand.

5. Für die bestrahlte Lage dreier räumlichen Gebilde ergiebt sich (vgl. II § 12, 6):

Wenn zwei Gebilde von einem dritten ähnlich bestrahlt werden, so liegen sie auch unter sich ähnlich, und die drei Ähnlichkeitspunkte liegen auf einer Geraden.

Ist nämlich $ABC\ldots$ ä. l. $A_1B_1C_1\ldots$ zu S_1 als Ä.-Punkt und $ABC\ldots$ ä. l. $A_2B_2C_2\ldots$ zu S_2 als Ä.-Punkt, so liegen A_1B_1 und A_2B_2 in einer Ebene, da sie beide parallel AB und somit unter sich parallel sind. Diese Ebene schneidet die Ebenen AA_1A_2 und BB_1B_2 in den Geraden A_1A_2 und B_1B_2, während von letzteren beiden Ebenen S_1S_2 die Schnittgerade ist, da AA_1 und BB_1 einander in S_1, AA_2 und BB_2 in S_2 schneiden. Alle drei Schnittgeraden S_1S_2, A_1A_2, B_1B_2 gehen durch einen Punkt S. Aus denselben Gründen mufs $C_1C_2,\ldots$ durch den Schnittpunkt S von A_1A_2 und S_1S_2 gehen. Das Streckenverhältnis der Strahlen bleibt hierbei stets gleich

$$SA_1 : SA_2.$$

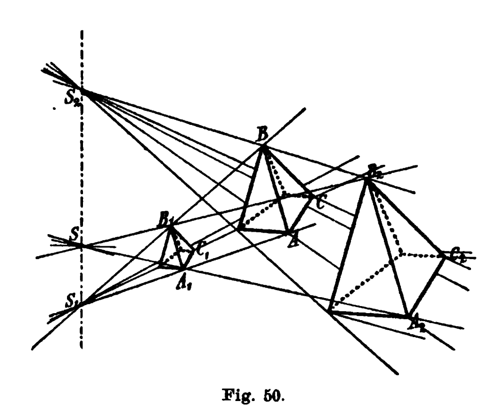


Fig. 50.

Sind die Ä.-Punkte von ABC mit den beiden andern Gebilden $\left\{\begin{matrix}\text{äufsere}\\ \text{innere}\end{matrix}\right\}$, so sind letztere beide $\left\{\begin{matrix}\text{gleichwendig}\\ \text{gegenwendig}\end{matrix}\right\}$ zu ersterem und somit unter sich gleichwendig und haben einen äufseren Ä.-Punkt; ist der eine Ä.-Punkt zwischen ABC und den beiden andern Gebilden ein äufserer, der andere ein innerer, so sind diese gegenwendig und haben unter sich einen inneren Ä.-Punkt. Es sind also entweder drei äufsere oder ein äufserer und zwei innere Ä.-Punkte vorhanden.

§ 21. Pyramide und Kegel.

1. Wenn ein Vieleck von einem Punkt aus bestrahlt wird, so schliefsen die Ebenenteile der Strahlen mit der Ebene des Vielecks

einen körperlichen Raum ein, den man Pyramide nennt. Der Strahlpunkt heifst die Spitze der Pyramide, die Ebene des Vielecks heifst Grundfläche, ihre Seiten Grundkanten; die Strahlenflächen, welche Dreiecke bilden, heifsen Seitenflächen, die übrigen Kanten Seitenkanten, die Gesamtheit der Seitenflächen Mantel, der Abstand der Spitze von der Grundfläche Höhe.

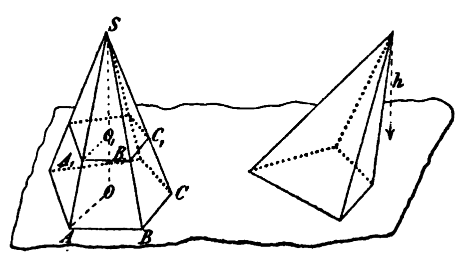


Fig. 51 a. u. Fig. 51 b.

Hat die Grundfläche einen Mittelpunkt (der Ecken oder Seiten), so heifst die Gerade von der Spitze nach diesem Punkt Axe, eine Ebene durch die Axe Axenschnitt und insbesondere der Axenschnitt, der zugleich die Höhe enthält, Hauptaxenschnitt. Ist die Axe selbst senkrecht zur Grundfläche, so heifst die Pyramide gerade.

Ist die Grundfläche ein regelmäfsiges Vieleck und die Spitze senkrecht über der Mitte der Grundfläche, so heifst die Pyramide regelmäfsig. Die Seitenflächen derselben sind gleichschenkelige Dreiecke (S. 12, 4). Aus der Übereinstimmung der Kantenwinkel an je zwei Ecken der Grundkanten folgt die Übereinstimmung der Ecken; daraus folgt:

In einer regelmäfsigen Pyramide bilden alle Seitenflächen und ebenso alle Seitenkanten die gleichen Winkel mit der Grundfläche.

Eine Pyramide, deren Grundfläche ein Dreieck ist, heifst Vierflach oder Tetraëder; sie wird von vier Dreiecken begrenzt, und es kann jede Fläche als Grundfläche angenommen werden. Ist jede

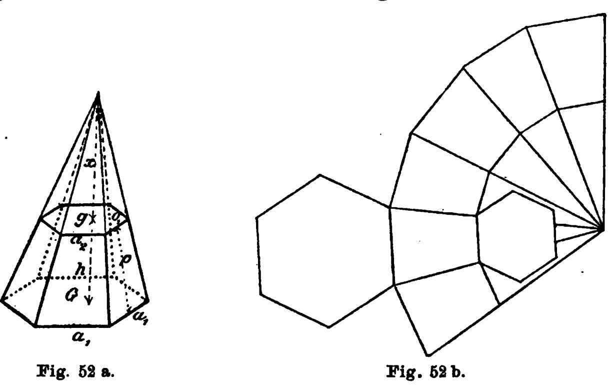


Fig. 52 a. Fig. 52 b.

derselben ein regelmäfsiges Dreieck, so ist der Körper ein regelmäfsiges Vierflach.

2. Aus § 20 folgt:

In einer Pyramide ist jede zur Grundfläche parallele Schnittfläche ä. l. mit dieser zur Spitze als Ä.-Punkt. Beide Flächen verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

Das letztere folgt aus der Übereinstimmung der Seitenverhältnisse mit dem der Strahlen von der Spitze und aus dem Lehrsatz vom Verhältnis ähnlicher Flächen (II § 26, 6).

Wird eine Pyramide von einer zur Grundfläche parallelen Ebene durchschnitten (Fig. 52), so heifst der Teil des Raumes, der zwischen beiden parallelen Ebenen liegt, ein Pyramidenstumpf; der Abstand der parallelen Flächen heifst seine Höhe. Bei einem Pyramidenstumpf sind die Seitenflächen Trapeze, bei einem regelmäfsigen Pyramidenstumpf gleichschenkelige Trapeze.

3. Wenn ein Kreis von einem Punkt aus bestrahlt wird, so bildet die Gesamtheit der Strahlen eine Kegelfläche. Der Raum, der von dieser und der Kreisebene eingeschlossen wird, heifst ein Kegel (Conus). Die Strahlen heifsen Seitengeraden des Kegels. Da der Kreis als Grenzfigur regelmäfsiger Vielecke aufgefafst werden kann, so gilt für den Kegel das, was oben von der Pyramide ausgesagt wurde. Der Kegel heifst gerade, wenn der Strahlpunkt oder die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche liegt; die Kegelfläche ist dann die eines Umdrehungskegels.

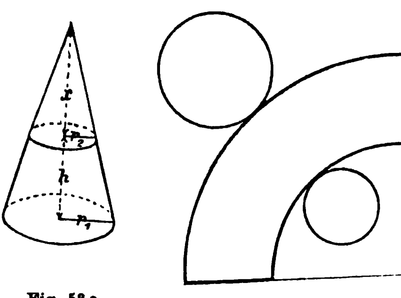


Fig. 53 a. Fig. 53 b.

Der zwischen zwei parallele Ebenen fallende Teil des Kegels heifst Kegelstumpf.

4. Wird der Mantel einer regelmäfsigen n-seitigen Pyramide in eine Ebene abgewickelt (Fig. 52 b), so entstehen n gleichschenkelige, übereinstimmende Dreiecke, deren Grundkanten einander gleich sind. Ist h die Höhe eines dieser Dreiecke zur Grundkante a, so ist sein Flächeninhalt $\frac{ah}{2}$, und die ganze Mantelfläche ist $= \frac{nah}{2} = \frac{na}{2} \cdot h$. Daraus folgt:

Der Mantel einer regelmäfsigen Pyramide oder eines geraden Kegels ist gleich dem Produkt des halben Umfanges seiner Grundfläche mit der Höhe eines Seitendreiecks oder einer Seitenstrecke.

Für den Kegel folgt dies auch daraus, dafs der abgewickelte Mantel (Fig. 53 b) einen Kreisausschnitt bildet, dessen Halbmesser gleich der Seitenstrecke und dessen Bogen gleich dem Umfang der Grundfläche.

Zusatz. a) Hat eine regelmäfsige n-seitige Pyramide die Grundkante a und die Seitenkante s, so ist ihre Oberfläche:

$$\frac{na}{2}\left[\sqrt{s^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{2R}{n}\right].$$

b) Hat ein gerader Kegel den Grundkreis-Halbmesser r und die Seitenstrecke s, so ist der **Kegelmantel** $= \pi r s$.

c) Hat der Kreisausschnitt, der von dem abgerollten Mantel gebildet wird, den Mittelpunktswinkel β, so ist sein Bogen $= s \cdot \operatorname{arc}\beta = 2\pi r$, somit

$$\operatorname{arc}\beta = 2\pi \cdot \frac{r}{s} = 2\pi \sin\alpha,$$

wenn α der Winkel der Axe und der Seitengeraden des Kegels ist. — Wird z. B. eine Halbkreisfläche zu einem Kegel zusammengerollt, so ist $\quad \pi = 2\pi\sin\alpha, \quad \sin\alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 30^0.$

5. Sind in einem regelmäfsigen n-seitigen Pyramidenstumpf a_1 und a_2 die Seiten der Grundflächen, p die Höhe eines Trapezes des Mantels, so ist der Inhalt eines solchen $\frac{a_1+a_2}{2}\cdot p$ und der ganze Mantel $n\cdot\frac{a_1+a_2}{2}\cdot p = \frac{na_1+na_2}{2}\cdot p$, wobei na_1 und na_2 die Umfänge der Grundflächen sind. Der Mantel des geraden Kegelstumpfs kann ebenfalls in sehr schmale Trapeze zerlegt werden. Statt der Seiten können auch die Mittelparallelen der Trapeze in Rechnung gezogen werden, welche zusammen den Umfang des Schnittes der Mittelparallelebene zu den Grundflächen bilden.

Der Mantel eines regelmäfsigen Pyramidenstumpfes oder eines geraden Kegelstumpfes ist gleich dem Produkt der halben Summe der Umfänge der Grundflächen (oder des Umfangs des Mittelparallelschnittes) mit der Höhe einer Seitenfläche, oder mit einer Seitenstrecke.

Zusatz. Sind bei einem geraden Kegelstumpf R und r die Halbmesser der Grundflächen und ist s die Seitenstrecke, so ist der **Mantel des Kegelstumpfs** $= \pi(R+r)s$, oder, wenn ϱ der Halbmesser des mittleren Schnittes ist, $= 2\pi\varrho s$.

6. Während in einem Kegel die der Grundfläche nicht parallelen Schnittebenen als Schnittlinien die sog. Kegelschnitte ergeben, ist in einem schiefen Kegel stets noch eine Lage der Ebene vorhanden, in welcher der Schnitt wiederum ein Kreis ist. Um diese Lage kurz zu kennzeichnen, nennt man Wechselschnitt eine solche Schnittebene eines schiefen Kegels, die auf dem Hauptaxenschnitt senkrecht steht und ihn in einer Geraden schneidet, die mit der einen Seitengeraden des Hauptaxenschnittes denselben Winkel bildet, wie die Grundfläche mit der andern Seitengeraden. Dann gilt der Satz:

Jeder Wechselschnitt eines schiefen Kegels ergiebt einen Kreis als Schnittlinie.

Sind nämlich SB_1A und SA_1B die beiden genannten Seitengeraden, AB und A_1B_1 die Schnittgeraden der Grundfläche und des Wechselschnittes mit der Axenebene, sodaſs $\sphericalangle\, SAB = SA_1B_1$, und legt man durch einen Punkt Y der fraglichen Schnittlinie eine Ebene parallel zur Grundfläche, welche die Seitengeraden SA und SB in A_2 und B_2 treffe, so ist die Schnittlinie dieser Ebene mit dem Kegel ein Kreis (2); die Schnittgerade XY der zur Grundfläche parallelen Ebene und der Schnittebene ist senkrecht zur Ebene SAB (S. 8, 9b), somit XY senkrecht zu A_1B_1 und A_2B_2. Die zum Durchmesser A_2B_2 senkrechte Halbsehne XY giebt (nach II § 10, 1b) die Gleichung

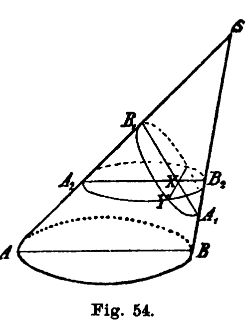


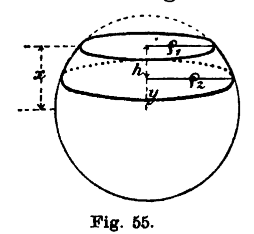
Fig. 54.

$$\overline{XY}^2 = A_2X \cdot XB_2 = A_1X \cdot XB_1;$$

das letztere folgt daraus, daſs $\triangle A_2XB_1 \backsim A_1XB_2$ ist. Daher ist jeder Punkt Y der Schnittlinie ein Punkt des um A_1B_1 als Durchmesser beschriebenen Kreises.

§ 22. Kugelfläche und andere Umdrehungsflächen.

1. Eine Ebene teilt eine Kugelfläche in zwei Teile, deren jeder Kugelhaube genannt wird. Der durch die Haube und die Schnittebene begrenzte Körper heiſst Kugelabschnitt oder Segment. Unter der Höhe der Haube oder des Kugelabschnittes versteht man die senkrechte Strecke von dem Mittelpunkt der Grundfläche (d. i. des Schnittkreises) bis zur Haube. — Zwei parallele Ebenen begrenzen auf der Kugelfläche einen zwischen ihnen liegenden Kugelgürtel oder eine Kugelzone; der entsprechende Körperteil der Kugel heiſst Kugelschicht; der Abstand beider parallelen Ebenen oder Grundflächen heiſst ihre Höhe.


Fig. 55.

Wie die Kugel durch Drehung eines Halbkreises um einen Durchmesser entsteht, so erhält man eine sich an die Kugel anschlieſsende Umdrehungsfläche, wenn ein den Halbkreis berührender Geradenzug um denselben Durchmesser sich dreht. Letztere Fläche besteht alsdann aus Kegeln, Kegelstumpfen oder Cylindern, deren Mantelflächen sich um so mehr an die Kugel anschlieſsen, je kleiner die Seiten derselben angenommen werden. Ist s_1 eine Seite eines solchen Mantels von sehr geringer Höhe, ϱ_1 der Halbmesser des mittleren Schnittkreises, so ist der Mantel $= 2\pi\varrho_1 s_1$ (S. 54, 5, Zusatz). Auch für den Fall, daſs der Kegel zu einem ebenen Kreis abgeflacht ist, gilt

diese Formel. Zieht man von einem Grenzpunkt von s_1 die Höhe h_1 des sehr schmalen Gürtels und den Kugelhalbmesser r nach dem Endpunkt des (nach dem Berührungspunkt von s gezogenen) Halbmessers ϱ_1, so entstehen zwischen s_1 und h_1 einerseits und r und ϱ_1 andererseits ähnliche Dreiecke, da die Seiten dieser Dreiecke paarweise zu einander senkrecht sind; daher ist $s_1 : h_1 = r : \varrho_1$ oder $\varrho_1 s_1 = r h_1$. Folglich ist die Fläche des schmalen Gürtels $= 2\pi r \cdot h_1$; für einen zweiten, dessen Höhe h_2, ist sie $= 2\pi r \cdot h_2$ u. s. w., also für die Gesamtheit aller dieser Gürtel, d. h. für den ganzen Gürtel oder die Haube $2\pi r(h_1 + h_2 + \cdots) = 2\pi r h$, wenn h die Höhe der Haube oder Gürtels ist. Somit ist

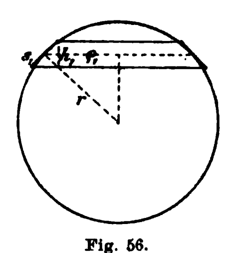


Fig. 56.

die **Fläche einer Haube oder eines Gürtels** $= 2\pi r h$.

Der Flächeninhalt einer Haube oder eines Gürtels ist gleich dem Produkt des Umfangs eines Hauptkreises mit der Höhe, oder auch gleich dem Mantel eines Cylinders von gleicher Höhe, dessen Halbmesser gleich dem Kugelhalbmesser ist.

Zusatz. a) Ist s die Sehne vom Umfang der Grundfläche einer Haube bis zum Endpunkt der Höhe, so ist $s^2 = 2rh$, folglich die Oberfläche der Haube $= \pi s^2$, d. i. gleich dem Inhalt eines Kreises, dessen Halbmesser s ist.

b) Ist ϱ der Halbmesser der Grundfläche der Haube, so ist $\varrho^2 + h^2 = s^2$, folglich der Inhalt der Haube $= \pi(\varrho^2 + h^2)$.

2. Die gesamte Oberfläche O der Kugel ist zusammengesetzt aus Hauben oder Gürteln, deren Gesamthöhe $2r$ ist; daher ist $O = 2\pi r \cdot 2r$ oder

die Kugeloberfläche $= 4\pi r^2$.

Die Oberfläche einer Kugel ist viermal so grofs als die Fläche eines Hauptkreises.

3. Ein Ebenenwinkel, dessen Kante durch den Mittelpunkt geht, begrenzt auf der Kugeloberfläche ein Kugelzweieck. Der Ebenenwinkel heifst Winkel des Kugelzweiecks; er ist zugleich der Winkel der Berührenden in den Schnittpunkten der beiden Hauptkreise, die das Zweieck begrenzen. Es ergiebt sich sofort, dafs zu gleichen Winkeln auch gleiche Kugelzweiecke einer Kugel gehören, woraus dann weiter folgt:

Ein Kugelzweieck verhält sich zur Kugeloberfläche, wie sein Winkel zu 4 R.

Fig. 57.

Ist α der Winkel, so ist die Oberfläche Z des Zweiecks:

$$Z = \frac{\operatorname{arc}\alpha}{2\pi} \cdot 4\pi r^2 \quad \text{oder} \quad Z = 2r^2 \operatorname{arc}\alpha.$$

4. Drei Hauptkreise einer Kugel, die einander in den drei Punkten ABC und den Gegenpunkten $A_1B_1C_1$ schneiden, bestimmen acht Kugeldreiecke auf der Kugel, von welchen je zwei, z. B. ABC und $A_1B_1C_1$, gegengesetzt sind. Diese beiden Dreiecke haben die gleiche Fläche (S. 18, 7).

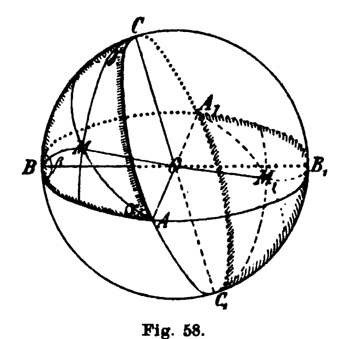


Fig. 58.

Sind die Winkel des Kugeldreiecks bei A, B, C der Reihe nach α, β, γ, und nehmen wir dieses Dreieck mit je einem an einer Seite angrenzenden zusammen zu einem Kugelzweieck, so folgt, wenn r der Kugelhalbmesser ist:

$$ABC + BCA_1 = 2r^2 \operatorname{arc} \alpha$$
$$BCA + CAB_1 = 2r^2 \operatorname{arc} \beta$$
$$CAB + ABC_1 = 2r^2 \operatorname{arc} \gamma.$$

Die Summe ergiebt — mit Berücksichtigung, dafs $BCA_1 = B_1C_1A$ und dafs

$$CAB + B_1C_1A + CAB_1 + ABC_1 = 2\pi r^2$$

nämlich gleich der Halbkugel ist, — für die Oberfläche den Wert:

$$2ABC = 2r^2 [\operatorname{arc} (\alpha + \beta + \gamma) - \pi]$$

oder

$$\boldsymbol{\Delta = r^2 \operatorname{arc} (\alpha + \beta + \gamma - 2R).}$$

Der Inhalt eines Kugeldreiecks ist gleich dem Produkt des Halbmesserquadrates mit dem Arcus des Überschusses der Winkelsumme über 2R.

5. Dreht sich irgend ein Geradenzug $ABCD$ um eine Axe a, und sind die Mitten seiner Strecken der Reihe nach um s_1, s_2, s_3 ... von der Axe entfernt, so ist die Umdrehungsfläche (S. 54, 5, Zusatz) =

$$2\pi s_1 \cdot \overline{AB} + 2\pi s_2 \cdot \overline{BC} + 2\pi s_3 \cdot \overline{CD} + \cdots$$
$$= 2\pi (s_1 \cdot \overline{AB} + s_2 \cdot \overline{BC} + \cdots).$$

Die Mechanik lehrt, dafs der Schwerpunkt des schweren Geradenzugs $ABCD$... von der Axe um eine Strecke s entfernt ist, die bestimmt ist durch die Gleichung:

$$s = \frac{s_1 \cdot \overline{AB} + s_2 \cdot \overline{BC} + s_3 \cdot \overline{CD} + \cdots}{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \cdots}.$$

Fig. 59.

Hiernach ist die Oberfläche:

$$2\pi s (AB + BC + CD + \cdots).$$

Da eine krumme Linie stets als aus unbeschränkt vielen und kleinen geradlinigen Elementen zusammengesetzt betrachtet werden kann, so folgt allgemein:

Der Inhalt einer Umdrehungsfläche ist gleich dem Produkt der Länge der Erzeugenden mit dem Weg, den ihr Schwerpunkt beschreibt.

Der Satz gilt auch für den Fall, daſs dieser Weg kein vollständiger Kreis ist.

Fünftes Kapitel.

Rauminhalt der Körper.

§ 23. Gleichheit von Körperinhalten.

1. Unter dem Rauminhalt (Kubikinhalt oder Volumen) eines Körpers versteht man die Gröſse des von seinen begrenzenden Flächen eingeschlossenen Raumes. Die Inhalte zweier Körper sind einander gleich, wenn entweder der eine im Ganzen den Raum des andern ausfüllen kann, oder wenn beide Körper aus Paaren solcher Teile bestehen, oder wenn sie die Unterschiede je zweier Körper von gleichem Rauminhalte sind.

2. Wenn zwei gerade Prismen deckungsfähige Grundflächen und gleiche Höhen haben, so kann das eine Prisma genau in den Raum des andern gebracht werden. — Wenn für nicht deckungsfähige Grundflächen die Gleichheit der Inhalte dieser Flächen nachgewiesen werden kann — indem auf die in § 44 und 45 des I. Teiles angegebene Weise die Grundflächen entweder als Summen deckungsfähiger Flächen oder als Unterschiede solcher Flächen erkannt werden, — so ergiebt sich, daſs gerade Prismen von gleicher Höhe, die auf diese Flächen gestellt werden, in gleicher Weise als Summen oder Unterschiede gleicher Körper inhaltsgleich sind. So folgt durch Aufsetzen gerader Prismen von gleicher Höhe auf die betr. Figuren, daſs solche gerade Prismen einander gleich sind, deren Grundflächen Parallelogramme von gleicher Grundseite und Höhe sind (Fig. 157 bis 160 des I. Teiles) oder (als Hälften der Parallelogramme, Fig. 161) Dreiecke von gleicher Grundseite und Höhe (Fig. 162), und daſs jedes gerade dreiseitige Prisma in ein anderes inhaltgleiches verwandelt werden kann, wie die Grundfläche in ein andres inhaltgleiches Dreieck (Fig. 178, 179, 181) und jedes n-seitige Prisma in ein dreiseitiges (Fig. 180). Daraus geht hervor:

Gerade Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe sind inhaltsgleich.

3. Wenn ein schiefes Prisma GG_1 durch einen Querschnitt S zerlegt wird, so bringt eine Verschiebung längs der Kante den Teil GS in die Lage G_1S_1 und verwandelt damit das schiefe Prisma in ein raumgleiches, gerades SS_1 von der gleichen Kantenlänge. Bei sehr

schiefem und kurzem Prisma sind zwei oder mehr Querschnitte und Verschiebungen zu dieser Verwandlung notwendig (vgl. I. Teil, Fig. 159 u. 160). Mit Rücksicht auf 2 folgt hieraus:

a) *Schiefe Prismen mit gleichen Querschnitten und Kantenlängen sind inhaltsgleich, nämlich gleich einem geraden Prisma, dessen Grundfläche der Querschnitt und dessen Höhe die Kante ist.*

Insbesondere folgt hieraus:

b) *Ein Parallelflach wird durch die Ebene zweier einander paralleler Eckenlinien der Grundflächen in zwei raumgleiche dreiseitige Prismen zerlegt;*

denn durch die Ebene wird der Querschnitt der beiden gegenwendig gleichen Körperteile in zwei flächengleiche Dreiecke zerlegt.

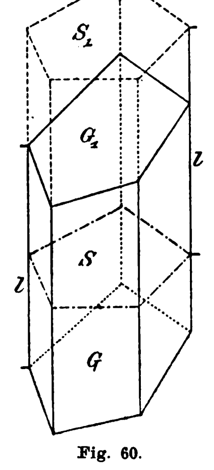


Fig. 60.

4. Errichtet man auf der Grundfläche G eines Parallelflaches GG_1 ein zweites gerades Parallelflach GG_2, so läſst sich in der Ebene $G_1 G_2$ zu den Parallelogrammen G_1 und G_2 ein drittes G_3 zeichnen durch die Verlängerungen der Seiten der ersten beiden. Das Prisma mit der Grundfläche AA_2A_3 und der Seitenkante AD wird durch Verschiebung längs der Strecke AB in den Raum des Prismas mit der Grundfläche BB_2B_3 gebracht. Zieht man beide Prismen einzeln von dem Prisma mit der Grundfläche AA_2B_3B ab, so bleibt Prisma $GG_3 = GG_2$. Auf gleiche Weise folgt aus der Deckungsfähigkeit der dreiseitigen Prismen mit den Grundflächen AA_1A_3 und DD_1D_3, daſs Parallelflach $GG_3 = GG_1$, somit $GG_1 = GG_2$. Hieraus folgt wieder mit Rücksicht auf 2:

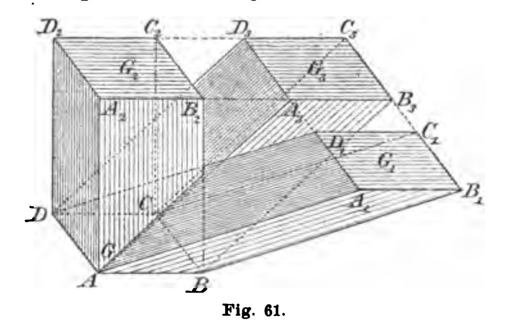


Fig. 61.

Parallelflache von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind raumgleich, nämlich gleich einem geraden Prisma von derselben Grundfläche und Höhe.

5. Hiernach haben auch schiefe dreiseitige Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe den gleichen Rauminhalt, als Hälften von gleichen Parallelflachen (3 b), zu denen sich die Prismen ergänzen lassen. — Zerlegt man in irgend einem Prisma die Grundfläche in Dreiecke und legt durch deren Seiten Ebenen parallel zu den Seitenkanten, so wird das Prisma in dreiseitige Prismen zerlegt, deren jedes raumgleich ist mit dem geraden Prisma auf demselben Dreieck und mit derselben

Höhe; alle diese Prismen bilden ein gerades Prisma, das den gleichen Rauminhalt wie das gegebene hat.

Gerade und schiefe Prismen und Cylinder mit gleichen Grundflächen und Höhen haben gleichen Raumgehalt.

Der Cylinder kann nämlich als eine Art Prisma aufgefafst werden.

6. Die Ergebnisse der Nummern 3 bis 5 lassen sich auch auf folgende Weise gewinnen.

Gesetzt es lassen sich zwei Körper so zwischen zwei parallele Ebenen legen, dafs jede beliebige weitere parallele Ebene in dem einen Körper eine Schnittfläche von demselben Flächeninhalt wie in dem andern Körper giebt, und denken wir durch beide so gelegte Körper unzählig viele solche Ebenen gelegt und zwischen je zwei auf einander folgenden Ebenen auf und unter jede Schnittfläche ein gerades Prisma (oder Cylinder) errichtet, so sind je zwei solche Prismen der beiden Körper zu denselben Schnittflächen einander gleich, da sie gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben. Nehmen wir an, dafs von unten nach oben die Schnittflächen der Art kleiner werden, dafs der Grundrifs einer Fläche auf der unmittelbar unter ihr liegenden Ebene ganz innerhalb der Schnittlinie dieser Ebene falle, so entsteht zwischen je zwei Schnittflächen zu der unteren ein Prisma, das gröfser, und zu der oberen eines, das kleiner ist als die Körperschicht zwischen beiden Schnittflächen. Die Gesamtheit aller gröfseren Prismen hat bei beiden Körpern den gleichen Raumgehalt S_1 und ebenso die Gesamtheit aller kleineren Prismen S_2, und die Inhalte beider Körper liegen zwischen diesen beiden Summen. Der Unterschied $S_1 - S_2$ beider Summen von geraden Prismen wird aber um so kleiner, je näher die Schichten aneinander rücken. (Er ist z. B. bei Pyramiden, in welchen der Grundrifs der Spitze innerhalb der Grundfläche liegt, gleich dem untersten Prisma.) Da dieser Unterschied unbeschränkt klein gemacht werden kann, so gilt für die zwischen beiden Summen liegenden Körperinhalte der wichtige Satz von Cavalieri († 1647):

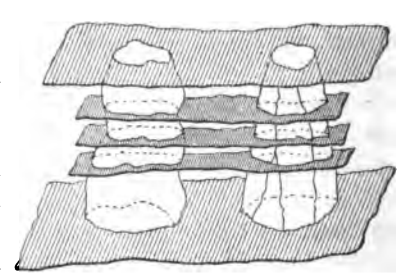
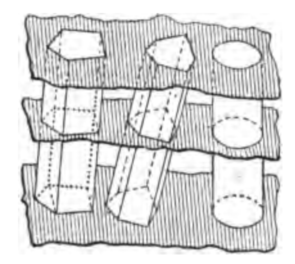


Fig. 62.

a) *Zwei Körper, die auf eine Grundebene gestellt in jeder ihr parallelen Schnittebene zwei gleiche Schnittflächen ergeben, haben gleichen Rauminhalt.*

Wenn die Beschränkung, unter der dieser Satz hier bewiesen wurde, wegfällt, so schrumpft doch beim Aneinanderrücken der Schnittflächen der Unterschied des einzelnen geraden Prismas und der Körperschicht linienartig zusammen, während die Schicht flächenartig wird. Nun bilden

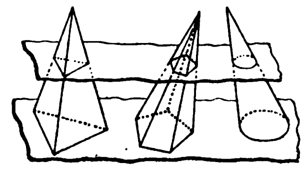
die Summen der flächenartigen Schichten die Körper; dagegen wächst die Summe der linienartigen Unterschiede zu einem flächenartigen Mantel an, so dafs mit abnehmender Schichthöhe ihr Raumgehalt dem der Körper gegenüber verschwindet.


Fig. 63.

Solche Cavalieri'sche Körper sind Cylinder und Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe, da jede zur Grundfläche parallele Schnittfläche mit dieser übereinstimmt; d. h.:

b) *Prismen und Cylinder von gleicher Grundfläche und Höhe haben gleichen Inhalt.*

Ferner sind solche Körper Pyramiden und Kegel, da hier die Schnittflächen sich verhalten wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze (S. 53, 2) und da diese Abstände bei gleicher Höhe der Körper für eine Schnittebene parallel der Grundfläche in beiden ebenfalls einander gleich sind; somit gilt:


Fig. 64.

c) *Pyramiden und Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe haben gleichen Inhalt.*

Zusatz. Auch Pyramiden und Kegelstumpfe von gleicher Grundfläche und Höhe sind Cavalieri'sche Körper.

7. Zur Vergleichung der Inhalte von Prismen und Pyramiden bietet die Zerlegung eines dreiseitigen Prismas $ABCA_1B_1C_1$ in drei Pyramiden den Weg. Zeichnet man auf den Seitenflächen den Geradenzug der Eckenlinien B_1AC_1B und legt durch je zwei auf einander folgende Eckenlinien eine Ebene, so wird das Prisma in drei Pyramiden zerlegt. Zwei derselben $C_1(ABC)$ und $A(A_1B_1C_1)$ stimmen in der Grundfläche und Höhe mit dem Prisma überein, sind also inhaltsgleich. Nehmen wir C_1 als Spitze der letzteren und auch als Spitze der dritten Pyramide $C_1(ABB_1)$, so folgt auch für diese die Gleichheit der Inhalte, da auch $\triangle AA_1B_1 = ABB_1$ ist. Es ist also das Prisma in drei inhaltsgleiche dreiseitige Pyramiden zerlegt. Umgekehrt kann jede dreiseitige Pyramide zu einem dreiseitigen Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe ergänzt werden, welches den dreifachen Inhalt hat.

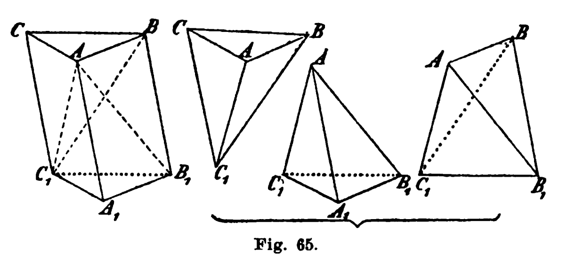


Fig. 65.

Es folgt hieraus allgemein:

a) *Der Inhalt einer Pyramide oder eines Kegels ist der dritte*

Teil des Inhalts eines Prismas oder Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe.

Denn die Pyramide kann stets in dreiseitige Pyramiden zerlegt werden, indem man die Grundfläche in Dreiecke zerlegt und von deren Seiten Ebenen nach der Spitze legt. Die Inhalte dieser dreiseitigen Pyramiden sind ein Drittel der Inhalte dreiseitiger Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe; der Gesamtinhalt solcher dreiseitigen Prismen läſst sich aber zu einem einzigen Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe vereinigen.

Zugleich folgt auch hieraus mit Rücksicht auf 5:

b) *Pyramiden oder Kegel mit gleichen Grundflächen und Höhen haben den gleichen Rauminhalt.*

§ 24. Inhalt von Prisma, Cylinder, Pyramide und Kegel.

1. Als Maſs des Rauminhalts wird ein Würfel genommen, dessen Kante gleich der Längeneinheit ist. Hat die Kante eines Würfels a Längeneinheiten, so enthält die Grundfläche a^2 Flächeneinheiten, und man kann auf dieselbe a^2 Würfeleinheiten setzen. In den ganzen Würfel gehen dann a solcher Schichten übereinander, also a^3 Raumeinheiten. — Teilt man die Würfelkante in n gleiche Teile und nimmt zu diesem Teil als Kante den Würfel, so gehen n^3 solcher Würfelchen in die Würfeleinheit; eines derselben ist also $\frac{1}{n^3}$ der Raumeinheit.

2. Gesetzt es gehen auf die Grundfläche eines geraden Prismas g Flächeneinheiten, so kann man auf dieselbe g Raumeinheiten setzen, und wenn auf die Höhe h Längeneinheiten gehen, so kann man in das Prisma h solcher Schichten übereinander legen; also enthält das Prisma gh Raumeinheiten. — Ist die Grundfläche nicht in eine Anzahl ganzer Flächeneinheiten zerlegbar, so kann man sie in eine Anzahl kleinerer Quadrate zerlegen, deren Seite $= \frac{1}{n}$ der Längeneinheit ist; der Rest, welcher hierbei am Umfang der Fläche möglicherweise übrig bleibt, ist um so kleiner, je kleiner $\frac{1}{n}$ angenommen wird; es kann somit $\frac{1}{n}$ so klein gedacht werden, daſs jeder meſsbare Rest verschwindet. Das Quadrat zu $\frac{1}{n}$ der Längeneinheit ist dann $\frac{1}{n}$ der Flächeneinheit; wenn p solcher Quadrate in die Grundfläche gehen, so ist deren Inhalt $g = \frac{p}{n^2}$, und es gehen auf die Grundfläche p Würfel, deren Kante $\frac{1}{n}$ der Längeneinheit und deren Inhalt $\frac{1}{n^3}$ der Raumein-

heit ist. Ist die Höhe des Prismas $h = q \cdot \frac{1}{n}$, so gehen q solcher Schichten übereinander, somit $q \cdot p$ solcher Würfelchen in das ganze Prisma. Daher ist der Rauminhalt $q \cdot p \frac{1}{n^3} = \left(q \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot \left(p \cdot \frac{1}{n^2}\right) = hg$.

Ein schiefes Prisma, das dieselbe Grundfläche g und Höhe h hat, hat auch denselben Inhalt. Ein Cylinder ist als besonderer Fall des Prismas aufzufassen.

Indem man für die Vervielfachung der Maſszahlen von Strecken und Flächen die (nach Teil II § 1, 7) abgekürzte Ausdrucksweise gebraucht, ergiebt sich für die abgeleitete Beziehung folgender Satz:

***Der Inhalt eines Prismas oder Cylinders** ist gleich dem Produkt seiner Grundfläche und Höhe* $= gh$.

Zusatz. Der Inhalt eines Quaders, dessen an einer Ecke zusammenstoſsende Kanten a, b, c sind, ist abc; der Inhalt eines Würfels, dessen Kante a, ist a^3. Der Inhalt eines Prismas von der Höhe h, dessen Grundfläche ein regelmäſsiges n-Eck mit der Seite a ist, beträgt $\frac{na^2h}{4} \operatorname{cotg} \frac{2R}{n}$; hat ein Cylinder als Grundfläche einen Kreis mit dem Halbmesser r und ist seine Höhe $= h$, so ist der **Inhalt des Cylinders** $= \pi r^2 h$; ist die Grundfläche eine Ellipse mit den Halbaxen a und b, so ist der Inhalt des Cylinders $= \pi abh$.

3. Aus 2 und S. 61, 7 folgt:

*Der **Inhalt einer Pyramide** oder **eines Kegels** ist ein Drittel des Produkts aus Grundfläche und Höhe* $= \frac{gh}{3}$.

Zusatz. Von einer n-seitigen regelmäſsigen Pyramide mit der Grundkante a und Höhe h ist der Inhalt $= \frac{na^2h}{12} \operatorname{cotg} \frac{2R}{n}$; ferner ist **der Inhalt des Kegels** $= \frac{\pi r^2 h}{3}$.

4. Der Inhalt eines Pyramiden- oder Kegelstumpfes (Fig. 52 und 53) ist der Unterschied zweier von den Grundflächen begrenzten Pyramiden oder Kegel. Ist G der Inhalt der gröſseren Grundfläche, g der der kleineren und h der Abstand beider, während die kleinere um x von der Spitze entfernt sei, so ist der Inhalt des Stumpfes $J = \frac{G(h+x)}{3} - \frac{gx}{3} = \frac{1}{3}[Gh + (G-g)x]$. Nun ist (S. 52, 2): $(h+x)^2 : x^2 = G : g$ oder $\frac{h+x}{x} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}}$, $\frac{h}{x} = \frac{\sqrt{G} - \sqrt{g}}{\sqrt{g}}$, $x(\sqrt{G} - \sqrt{g}) = h\sqrt{g}$, woraus durch Vervielfachung mit $(\sqrt{G} + \sqrt{g})$ folgt: $x(G-g) = h(\sqrt{Gg} + g)$. Dies oben eingesetzt ergiebt: $J = \frac{1}{3}[Gh + h(\sqrt{Gg} + g)]$ oder

der Inhalt des Pyramidenstumpfes $= \frac{h}{3}(G + \sqrt{Gg} + g)$.

Zusatz. *Sind die Grundflächen Kreise, deren Halbmesser R und r, so ergiebt sich als*

Inhalt des Kegelstumpfes $= \frac{\pi h}{3} [R^2 + Rr + r^2]$.

5. **Zur Berechnung** des Inhalts eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas $ABCA_1B_1C_1$, dessen Kanten $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$ seien, zerlegen wir es durch eine Ebene von einer Ecke A nach der gegenüberliegenden Kante B_1C_1 in eine vierseitige und in eine dreiseitige Pyramide. Die Spitze der ersteren ist in der Ecke A und die Grundfläche ist die gegenüberliegende Seitenfläche BCC_1B_1. Die Spitze der dreiseitigen Pyramide sei B_1, ihre Grundfläche AA_1C_1. Im Querschnitt $A_2B_2C_2 = \Delta$ sei h_1 die Höhe zu B_2C_2, h_2 die zu C_2A_2. Die vierseitige Pyramide hat nun den Inhalt $\frac{b+c}{2} \cdot \overline{B_2C_2} \cdot \frac{h_1}{3} = \frac{b+c}{3} \cdot \Delta$, die dreiseitige $\frac{a \cdot \overline{C_2A_2}}{2} \cdot \frac{h_2}{3} = \frac{a}{3} \cdot \Delta$; daher ist der Inhalt des Körpers $V = \frac{a+b+c}{3} \cdot \Delta$.

Fig. 66.

Der Inhalt eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas ist gleich dem Produkt des Querschnitts mit dem Drittel der Summe der Seitenkanten.

Zusatz. Ein Körper (Damm, Mulde), dessen Grundflächen zwei Rechtecke mit parallelen Seiten sind, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$, mit dem Abstand h beider Flächen, zerfällt durch eine Schnittebene, die durch parallele Kanten b und b_1 gelegt wird, in zwei dreikantige Prismen; der Querschnitt $\perp bb_1$ giebt ein Trapez, das in zwei Dreiecke zerlegt wird $\frac{ah}{2}$ und $\frac{a_1h}{2}$, so dafs der Inhalt des Körpers:

$$\frac{ah}{6}(2b + b_1) + \frac{a_1h}{6}(2b_1 + b) = \frac{h}{6}[a(2b + b_1) + a_1(b + 2b_1)].$$

6. Sind $s_1, s_2 \cdots s_n, s_{n+1}, \cdots s_{2n}$ (Fig. 46, S. 48) die Seitenkanten eines schief abgeschnittenen Prismas mit einer Axe, so wird der Körper mittels Ebenen von der Axe m nach den Seitenkanten in n Paare dreiseitiger Prismen zerlegt. Die Prismen an zwei gegengesetzten Seitenflächen ergeben zusammen den Inhalt $\Delta_1 \cdot \frac{s_1 + s_2 + m}{3}$ $+ \Delta_1 \cdot \frac{s_{n+1} + s_{n+2} + m}{3} = \frac{\Delta_1}{3} \cdot (s_1 + s_{n+1} + s_2 + s_{n+2} + 2m) = \frac{\Delta_1}{3} \cdot 6m$ $= 2\Delta_1 \cdot m$, wobei Δ_1 der Inhalt des Querschnitts von beiden dreiseitigen Pyramiden. Für ein zweites gegengesetztes Prismenpaar folgt ebenso $2\Delta_2 \cdot m$ u. s. w. Da $(2\Delta_1 + 2\Delta_2 + \cdots 2\Delta_n) = f$, dem Flächeninhalt des Querschnitts ist, so ist der Gesamtinhalt $= m \cdot f$.

Der Inhalt eines schief abgeschnittenen Prismas mit Axe oder eines Cylinders ist gleich dem Produkt des Querschnitts mit der Axe.

7. In zwei ähnlichen dreiseitigen Pyramiden, in welchen a_1 und a_2 entsprechende Kanten sind, verhalten sich die entsprechenden Grundflächen wie $a_1^2 : a_2^2$ und die Höhen wie $a_1 : a_2$, daher die Inhalte wie $a_1^3 : a_2^3$. Ähnliche Körper, welche von irgend welchen Ebenen begrenzt sind, lassen sich durch Schnittebenen in ähnliche dreiseitige Pyramiden zerlegen, deren Raumverhältnis mit dem der dritten Potenzen entsprechender Kanten übereinstimmt. Daher folgt:

Die Inhalte ähnlicher Körper verhalten sich wie die dritten Potenzen entsprechender Strecken.

§ 25. Rauminhalt von Kugelteilen und anderen Umdrehungskörpern.

1. Eine Umdrehungskegelfläche, deren Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, nimmt aus der Kugel einen Körper heraus, der Kugelausschnitt oder Kugelsector genannt wird. Denken wir uns auf die zugehörige Kugelhaube ein Netz von kleinen Dreiecken gezeichnet und durch deren Seiten Ebenen nach dem Mittelpunkt gelegt, so kann ein sehr kleines Oberflächenteilchen O als eben betrachtet werden und als Grundfläche einer Pyramide, deren Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, deren Höhe also gleich dem Kugelhalbmesser r, deren Inhalt folglich $= \frac{Or}{3}$ ist. Die Summe aller dieser Pyramiden, deren Grundflächen die Haube bilden, ergiebt den Kugelausschnitt $= \frac{Hr}{3}$ und da $H = 2\pi rh$ ist, so ist

$$\text{der **Kugelausschnitt** } S = \frac{2\pi r^2 h}{3}.$$

In gleicher Weise folgt für den Inhalt der ganzen Kugel $K = O \cdot \frac{r}{3} = 4\pi r^2 \cdot \frac{r}{3}$ oder

$$\textbf{Inhalt der Kugel } K = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi d^3}{6},$$

wenn $d = 2r$ der Durchmesser ist.

Zusatz. Für ein körperliches Zweieck, dessen Winkel α ist, ergiebt sich der Inhalt $\frac{2}{3} r^3 \cdot \operatorname{arc} \alpha$.

2. Ein Kugelabschnitt oder Kugelsegment wird durch eine Ebene von der Kugel abgetrennt. Sein Inhalt ergiebt sich als Unterschied des Ausschnitts und des auf der Schnittfläche stehenden Kegels, dessen Höhe $= (r - h)$ ist. Somit ist $\Sigma = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{\pi \varrho^2}{3}(r - h)$, wobei $\varrho^2 = h(2r - h)$ zu der Formel führt:

$$\textbf{Inhalt des Kugelabschnittes } \Sigma = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$$

Wird der Wert von r in ϱ und h ausgedrückt, so folgt:

Inhalt des Kugelabschnittes $\Sigma = \frac{\pi h}{6}(3\varrho^2 + h^2)$.

3. Mittels des Satzes von Cavalieri lassen sich diese Formeln auf folgende Weise ableiten.

Beschreiben wir um eine Kugel einen geraden Cylinder, dessen Mantel und Grundflächen die Kugel berühren, und heben aus diesem Cylinder einen Doppelkegel heraus, dessen Spitze in den Kugelmittelpunkt fällt und dessen Grundflächen mit denen des Cylinders zusammenfallen, so bleibt ein Cavalierischer Körper zur Kugel übrig. Ist nämlich der Kugelhalbmesser r, und wird parallel zu den Grundflächen eine Schnittebene gelegt im Abstand z vom Mittelpunkt, so schneidet diese aus der Kugel einen Kreis von der Fläche $\pi\varrho^2 = \pi(r^2 - z^2)$ und aus dem Körper einen Ring von der Fläche $(\pi r^2 - \pi z^2) = \pi(r^2 - z^2)$; denn auch der Halbmesser des Kegelschnitts ist z, weil die Seitengeraden des Kegels mit der Axe den Winkel $\frac{R}{2}$ bilden.

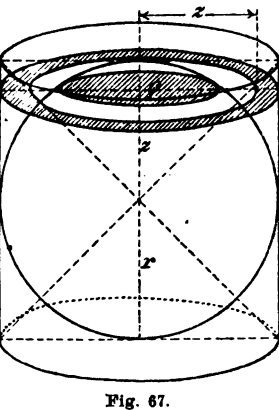


Fig. 67.

a) Der Inhalt der Kugel ist somit gleich dem des genannten Rest-Körpers oder $K = \pi r^2 \cdot 2r - 2\pi r^2 \cdot \frac{r}{3}$ oder

$$K = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi d^3}{6},$$

wenn d der Durchmesser der Kugel.

b) Der Inhalt eines Kugelabschnittes von der Höhe h stellt sich in dem zugehörigen Cavalierischen Körper dar als der Unterschied eines Cylinders $\pi r^2 h$ und eines Kegelstumpfes, dessen zwei Halbmesser r und $(r - h)$ und dessen Höhe h. Daher ist:

$$\Sigma = \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}[r^2 + r(r-h) + (r-h)^2] = \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}(3r^2 - 3rh + h^2),$$

$$\Sigma = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$$

c) Der Inhalt eines Kugelausschnittes besteht aus einem Kugelabschnitt und einem Kegel, dessen Grundfläche mit der des Abschnitts und dessen Spitze mit dem Kugelmittelpunkt zusammenfällt. Der Inhalt ist:

$$S = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) + \frac{\pi h}{3}(2r - h)(r - h) = \frac{\pi h}{3}(3rh - h^2 + 2r^2 - 3rh + h^2),$$

$$S = \frac{2\pi r^2 h}{3}.$$

d) Für eine Kugelschicht (Fig. 55), deren Grundflächen die Abstände x und y $(x > y)$ von dem Mittelpunkt haben, ergiebt sich

aus dem zwischen beide Flächen fallenden Teil des oben beschriebenen Körpers:

$$Z = \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}(x^2 + xy + y^2) = \frac{\pi h}{6}(6r^2 - 2x^2 - 2xy - 2y^2)$$

$= \frac{\pi h}{6}[3(r^2 - x^2) + 3(r^2 - y^2) + (x - y)^2]$. Wenn nun h die Höhe, ϱ_1 und ϱ_2 die Halbmesser der Schnittflächen sind, so ist $x - y = h$, $r^2 - x^2 = \varrho_1^2$, $r^2 - y^2 = \varrho_2^2$. Die Ausrechnung von Z liefert:

Inhalt der Kugelschicht $Z = \frac{\pi h}{6}[3(\varrho_1^2 + \varrho_2^2) + h^2]$.

5. Dreht sich ein rechtwinkeliges Dreieck um eine Axe, welche mit einer Kathete a parallel ist und von den Ecken des Dreiecks die Abstände r_1, r_1 und r_2 hat, so ist der Inhalt des Umdrehungskörpers

$$\frac{\pi a}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) - \pi r_1^2 \cdot a = \frac{\pi a}{3}(r_1 r_2 + r_2^2 - 2r_1^2)$$
$$= \frac{\pi a}{3}(r_2 - r_1)(2r_1 + r_2).$$

Nun ist $\frac{2r_1 + r_2}{3} = s$ der Abstand des Schwerpunktes des Dreiecks von der Axe (II. Teil, Aufg. II, 11), und $a(r_2 - r_1) = 2i$ ist der doppelte Inhalt des Dreiecks; daher der Rauminhalt $= 2\pi s i$. Irgend eine Fläche läfst sich in eben solche sehr kleine Dreiecke zerlegen, deren Inhalte i_1, i_2, $\cdots$ und Schwerpunktsabstände s_1, s_2, $\cdots$ seien. Daher ist der Inhalt des Umdrehungskörpers der Fläche: $2\pi(s_1 i_1 + s_2 i_2 + \cdots)$. Der Schwerpunktsabstand s einer solchen Fläche i von der Axe ist durch die Gleichung bestimmt: $si = s_1 i_1 + s_2 i_2 + \cdots$.

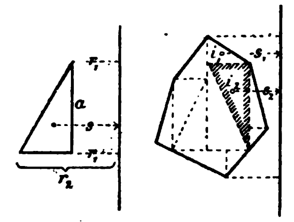


Fig. 68.

Somit ist der Inhalt: $I = 2\pi s i$.

Der Inhalt eines Umdrehungskörpers ist gleich dem Produkt der erzeugenden Fläche mit dem Weg ihres Schwerpunktes.

Dieser Satz und der entsprechende auf S. 57, 5 führen den Namen: „Guldin'sche Regeln“ (1640).

Sechstes Kapitel.

Die regelmäfsigen Körper.

§ 26. Beziehung zwischen der Zahl der Ecken, Kanten und Flächen eines beliebigen Vielflachs.

1. Unter einem f-flach (Polyeder) versteht man einen Körper, der von f Ebenen begrenzt ist. Wir fassen im Folgenden nur solche $f$flache

ins Auge, deren Oberfläche von einer Geraden jeweils nur in zwei Punkten geschnitten wird, die also keine einspringenden Ecken haben.

Um von einem solchen f flache den Zusammenhang zwischen der Anzahl seiner Flächen, Ecken und Kanten zu bestimmen, bildet man den Grundriſs seiner Flächen auf einer Ebene. Der Umfang dieses Grundrisses ist ein Vieleck, von welchem die Grundrisse desjenigen Teiles der Flächen, welcher der Grundriſsebene abgewandt ist, eingeschlossen sind und ebenso die Grundrisse des Teiles der Flächen, welcher der Grundriſsebene zugewandt ist. Hat das f flach k Kanten, so bilden die Grundrisse des ersten und des zweiten Teils zusammen f Vielecke, in denen die Anzahl der Winkel $2k$ ist, da jeder Grundriſs einer Kante zwei Vielecken angehört und jedes Vieleck ebensoviele Winkel als Kanten hat. Daher ist die Summe aller Winkel der Grundrisse der Flächen

$$s = 2k \cdot 2R - f \cdot 4R = (k - f) \cdot 4R;$$

denn in jedem Vieleck von p Winkeln ist die Winkelsumme $p \cdot 2R - 4R$ (I § 14, 5).

Hat das f flach e Ecken, so bildet sich eine Anzahl e_1 von ihnen als Ecken des Umrisses und die übrigen e_2 als innere Ecken der Vielecke ab. Daher ist die eben berechnete Winkelsumme auch gleich $e_2 \cdot 4R$ (um jeden Eckpunkt $4R$) vermehrt um die doppelte Summe der Winkel des Umrisses, da diese Umriſswinkel erstens für den Teil in Rechnung kommen, welcher der Grundriſsebene ferner liegt und zweitens für den näher liegenden Teil; somit ist $s = e_2 \cdot 4R + 2(2e_1 - 4)R = 4(e_1 + e_2 - 2)R = 4(e - 2)R$. Aus beiden Werten für s folgt: $k - f = e - 2$ oder:

$$e + f = k + 2.$$

Die Zahl der Kanten eines Vielflaches ist um 2 kleiner, als die Summe der Zahlen von Flächen und Ecken (Euler, 1758).

2. Regelmäſsig nennen wir ein f flach, dessen Begrenzungsflächen regelmäſsige deckungsfähige Vielecke und dessen Ecken unter einander deckungsfähig sind. Ein solches kann keine einspringende Ecke haben, da sonst alle Ecken von dieser Art sein müſsten.

Die Zahl der regelmäſsigen Vielecke, die eine Ecke bilden können, ist dadurch beschränkt, daſs die Summe der Kantenwinkel s nicht $4R$ betragen darf (S. 29, 2).

Es können eine Ecke bilden:

I. Drei regelmäſsige Dreiecke ($s = 2R$).

II. Drei regelmäſsige Vierecke ($s = 3R$).

III. Vier regelmäſsige Dreiecke ($s = \frac{8}{3}R$).

IV. Drei regelmäſsige Fünfecke ($s = \frac{18}{5}R$).

V. Fünf regelmäſsige Dreiecke ($s = \frac{10}{3}R$).

Dagegen können drei regelmäfsige Sechsecke, sowie sechs regelmäfsige Dreiecke u. s. w. keine Ecke bilden, da ihre Winkelsumme $4R$ erreicht oder gar überschreitet.

Wird jede Ecke des $f$flaches von p Flächen gebildet, deren jede z Seiten oder Ecken hat, so treten an jeder der e Ecken p Kanten zusammen und es ist $pe = 2k$, da jede Kante von zwei Ecken begrenzt wird; ferner ist $zf = 2k$, da jede Kante zwei Flächen begrenzt. Somit ist $k = \frac{zf}{2}$, $e = \frac{2k}{p} = \frac{zf}{p}$, und es folgt aus 1:

$$\frac{zf}{p} + f = \frac{zf}{2} + 2, \qquad f = \frac{4p}{2p - z(p-2)}.$$

Es ergiebt sich daher für obige fünf Fälle:

I. $p = 3$, $z = 3$; $f = 4$,
das regelmäfsige Vierflach oder Tetraëder.

II. $p = 3$, $z = 4$; $f = 6$, das regelm. Sechsflach oder Hexaëder.	III. $p = 4$, $z = 3$; $f = 8$, das regelm. Achtflach oder Oktaëder.
IV. $p = 3$, $z = 5$; $f = 12$, das regelm. Zwölfflach oder Dodekaëder.	V. $p = 5$, $z = 3$; $f = 20$, das regelm. Zwanzigflach oder Ikosaëder.

Diese Körper, welche die Pythagoreischen, oft auch die Platonischen heifsen, wurden wiederholt zu physikalischen Hypothesen benutzt (Plato, Kepler 1596).

§ 27. Das regelmäfsige Vier-, Sechs- und Achtflach.

1. Das regelmäfsige Vierflach (Tetraëder) ist eine dreiseitige Pyramide, deren drei Seitenflächen, sowie die Grundfläche regelmäfsige Dreiecke sind. Seine Ecken stimmen vollkommen überein, da die drei Kantenwinkel übereinstimmen.

Das Netz des Körpers (Fig. 69 b), d. i. die Figur, welche bei der Ausbreitung der Flächen in eine Ebene entsteht, ist zusammengesetzt aus einem gleichseitigen Dreieck und drei weiteren solchen, welche sich an die Seiten des ersteren anschliefsen.

Fig. 69 b.

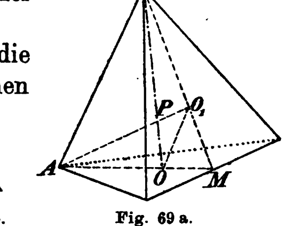


Fig. 69 a.

a) Ist die Seitenkante a, so ist eine Seitenfläche $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ und die ganze Oberfläche $O_4 = a^2\sqrt{3}$.

b) Die Höhe h des Körpers teilt die Höhe der Grundfläche im Verhältnis 2 : 1. Nun ist h die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse a und dessen andere Kathete $\frac{2}{3}$ der Höhe der Grund-

fläche, $\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$ ist; daher ist $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, und der Rauminhalt des Körpers $V_4 = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$.

c) Da die Fufspunkte O und O_1 zweier Höhen des Körpers die Höhen der Grundflächen im Verhältnis 2:1 teilen, so ist ihre Verbindungsgerade $O\,O_1$ (Fig. 69) parallel zu einer Seitenkante SA und $= \frac{a}{3}$, woraus dann folgt, dafs sich die beiden Körperhöhen im Verhältnis 3:1 teilen. Ihr Schnittpunkt P hat von den Ecken den Abstand $r = \frac{3}{4}h = \frac{a}{4}\sqrt{6}$ und von den Flächen den Abstand $\varrho = \frac{1}{4}h = \frac{a}{12}\sqrt{6}$.

d) Für den Winkel α zweier Flächen ist $\cos\alpha = \frac{h_1}{3} : h_1 = \frac{1}{3}$, wo h_1 die Höhe eines Seitendreiecks ist. Für den Winkel β einer Kante und Fläche ist $\sin\beta = \frac{h}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

2. Das regelmäfsige Sechsflach (Hexaëder) ist der Würfel. Das Netz hat die Gestalt von Fig. 70 b.

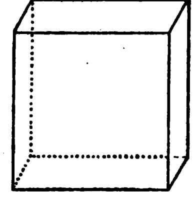


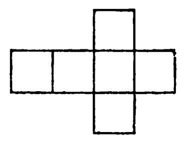
Fig. 70 a.

a) Ist die Kante a, so ist die Oberfläche $O_6 = 6a^2$.

b) Der Körperinhalt ist $V_6 = a^3$.

c) Alle Winkel sind Rechte.

d) Der Halbmesser der umbeschriebenen Kugel ist



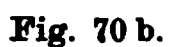


Fig. 70 b.

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3},$$

der der einbeschriebenen $\varrho = \frac{a}{2}$.

3. Das regelmäfsige Achtflach (Oktaëder) wird von zwei quadratischen Pyramiden gebildet, deren Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind und die mit ihrer Grundfläche beiderseits dieser Ebene an einander gelegt sind. Dafs die Ecken derselben übereinstimmen, ergiebt sich in folgender Weise. Eine Eckenlinie des Quadrats bildet mit den beiden angrenzenden Seitenkanten der Pyramide ein Dreieck, welches mit der durch dieselbe Eckenlinie begrenzten Hälfte des Quadrats deckungsfähig ist wegen der Übereinstimmung der Seiten. Daher ist auch der Winkel jener Seitenkanten ein R. Die Ebene derselben bildet mit zwei Seitenflächen ein Dreikant, das deckungsfähig ist mit dem Dreikant aus der quadratischen Fläche und denselben beiden Seitenflächen (wegen der Übereinstimmung der drei Kantenwinkel); jede Ecke des Körpers

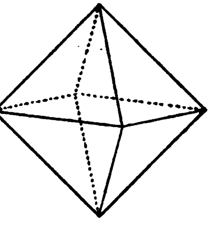


Fig. 71 a.

ist aber aus zwei solchen deckungsfähigen entsprechend liegenden Teilen zusammengesetzt.

Das Netz des Oktaëders ist Fig. 71 b.

Fig. 71 b.

a) Die Oberfläche ist $O_8 = 8 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}$.

b) Der Inhalt der beiden Pyramiden mit der Grundfläche a^2 und der Höhe, die gleich der halben Eckenlinie der Grundfläche $= \frac{a}{2}\sqrt{2}$ ist, ist $V_8 = \frac{2a^2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}$.

c) Der Mittelpunkt der quadratischen Flächen hat von allen Ecken den Abstand $r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und von allen Flächen den Abstand

$$\varrho = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{a}{6}\sqrt{6}.$$

d) Der Winkel α einer Seitenfläche mit der quadratischen Grundfläche wird bestimmt durch $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2}\sqrt{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{2}$; der Winkel zweier Seitenflächen ist dann $= 2\alpha$.

§ 28. Das regelmäfsige Zwölf- und Zwanzigflach.

1. Wenn man an jede Seite eines regelmäfsigen Fünfecks ein übereinstimmendes Fünfeck so anschliefst, dafs je zwei benachbarte derselben eine Kante gemeinsam haben, so entstehen an den Ecken des ersteren Fünfecks fünf deckungsfähige Dreikante. Die gemeinsame Kante zweier der angelegten Fünfecke bildet mit zwei freien Kanten derselben ein Dreikant, welches mit ersteren Dreikanten übereinstimmt, da zwei Kantenwinkel und der eingeschlossene Ebenenwinkel übereinstimmen und in gleicher Reihe auf einander folgen. Daher ist der Winkel der beiden freien Seiten ebenfalls gleich dem Winkel des regelmäfsigen Fünfecks; es läfst sich somit der von den genannten sechs Flächen teilweise begrenzte Raum durch eine zu dieser Zusammenstellung von Flächen deckungsfähige Gestalt vollständig begrenzen. Man erhält so das r e g e l m ä f s i g e Z w ö l f f l a c h (D o d e k a ë d e r).

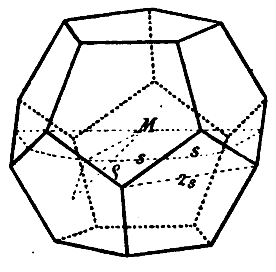


Fig. 72 a.

Das Netz ist Fig. 72 b.

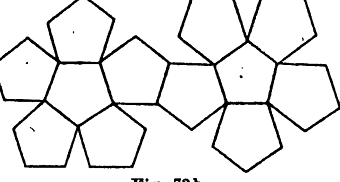


Fig. 72 b.

a) Die Oberfläche ist

$$O_{12} = 12 \cdot \frac{5a^2}{4} \cdot \operatorname{cotg} 36^0 = 15a^2 \operatorname{cotg} 36^0.$$

b) Der Körper hat als Mittelpunkt einen Punkt der Mittelparallelebene zu zwei parallelen Seitenflächen. Der Schnitt dieser Ebene geht

nämlich durch die Mitte von zehn Kanten und bildet ein regelmäfsiges Zehneck, da seine Seiten s jeweils parallel den entsprechenden Eckenlinien des Fünfecks sind und halb so grofs als diese Eckenlinien. Es ist $s = a \cdot \cos 36^0$ und der Halbmesser des dem Zehneck umbeschriebenen Kreises $r_1 = \frac{s}{2 \sin 18^0} = \frac{a \cos 36^0}{2 \sin 18^0} = \frac{a \cos 36^0 \cdot \cos 18^0}{2 \sin 18^0 \cdot \cos 18^0} = a \operatorname{cotg} 36^0 \cos 18^0$. Dies ist der Abstand der Mitte einer Seitenkante von dem Mittelpunkt. Die Mitte der Seitenkante ist von der Mitte der Fläche um $\frac{a}{2} \operatorname{cotg} 36^0$ entfernt. Daher ist der Abstand vom Mittelpunkt des Körpers zu einer Seitenfläche

$$\varrho = \sqrt{a^2 \operatorname{cotg}^2 36^0 \cos^2 18^0 - \frac{a^2}{4} \operatorname{cotg}^2 36^0} = a \operatorname{cotg} 36^0 \sqrt{\cos^2 18^0 - \frac{1}{4}}.$$

Nun ist $\cos^2 18^0 - \frac{1}{4} = \frac{1}{16}(10 + 2\sqrt{5} - 4) = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2$ $= \cos^2 36$, also $\varrho = a \operatorname{cotg} 36^0 \cos 36^0$.

Nimmt man den Mittelpunkt als Spitze von Pyramiden, die Seitenflächen als Grundflächen, so zerfällt der Körper in zwölf Pyramiden von der Höhe ϱ. Ihr Inhalt ist das Produkt der Oberfläche mit $\frac{\varrho}{3}$, d. i.

$$V_{12} = 5 a^3 \operatorname{cotg}^2 36^0 \cos 36^0.$$

c) Der Abstand der Ecken vom Mittelpunkt ist $r = \sqrt{r_1^2 + \frac{a^2}{4}}$. Da $r_1 = \frac{a \cos 36^0}{2 \sin 18^0} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{a}{4}(3 + \sqrt{5})$, so ist $r = \frac{a}{4}\sqrt{18 + 6\sqrt{5}}$ $= \frac{a}{4}\sqrt{3(6 + 2\sqrt{5})} = a\sqrt{3} \cos 36^0$.

d) Halbiert man an einer Ecke einen Ebenenwinkel, so zerfällt er in zwei rechtwinkelige Dreikante (Kugeldreiecke) mit der Hypotenuse von 108^0 und einer Kathete von 54^0, woraus die Winkel berechnet werden können (S. 40, 1), oder man bestimmt diese durch ϱ und r.

2. Eine Ecke S, die aus fünf regelmäfsigen Dreiecken zusammengesetzt ist, wird durch eine regelmäfsige fünfseitige Pyramide $SABCE$ erhalten, deren Seitenkanten den Grundkanten gleich sind. Eine Eckenlinie AC der Grundfläche bildet mit den anschliefsenden Seiten ein Dreieck ABC, welches übereinstimmt mit dem Dreieck ASC aus derselben Eckenlinie und den anschliefsenden Seitenkanten AS und CS. Es ist somit $\sphericalangle ASC = ABC = 108^0$, und an ASC läfst sich das regelmäfsige Fünfeck $ASCE_1D_1$ anschliefsen, das die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze in B bildet. Hierbei ist $D_1E_1 \parallel AC \parallel ED$ und die Verbindungsgeraden DD_1

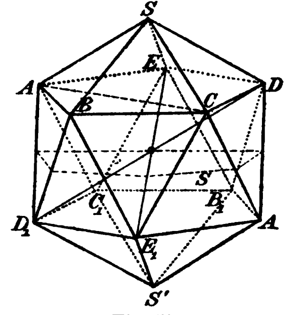


Fig. 73 a.

und EE_1 ergeben einen Schnittpunkt, zu dem man als Mittelpunkt das dem Fünfeck $ABCDE$ gegengesetzte Fünfeck $A_1B_1C_1D_1E_1$ und die zugehörige Pyramide bilden kann. Aufserdem bestimmen die Seiten der beiden Fünfecke zehn Dreiecke, so dafs sich ein Körper ergiebt, der von zwanzig regelmäfsigen Dreiecken begrenzt wird, von denen je fünf eine Ecke bilden. Es ist dies das **regelmäfsige Zwanzigflach (Ikosaëder).**

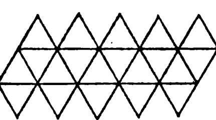
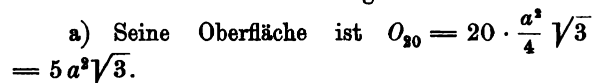


Fig. 73 b.

Das Netz desselben ist Fig. 73 b.



a) Seine Oberfläche ist $O_{20} = 20 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 5a^2\sqrt{3}$.

b) Die Ebene, die durch den Mittelpunkt des Körpers parallel zu den beiden Ebenen der gegengesetzten Fünfecke gelegt wird, ergiebt als Schnitt ein regelmäfsiges Zehneck, dessen Seiten s parallel zu den Grundkanten der beiden Pyramiden und gleich deren Hälften $\frac{a}{2}$ sind; der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises ist somit $r_1 = \frac{a}{4\sin 18^0} = a\cos 36^0$, da $4\sin 18^0 \cos 36^0 = 1$. Dies ist der Abstand des Mittelpunkts von der Mitte der Kante. Letztere ist von der Mitte der Seitenflächen um $\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$ entfernt; somit ist der Abstand des Mittelpunkts von den Flächen

$$\varrho = \sqrt{r_1^2 - \frac{a^2}{12}} = a\sqrt{\frac{6+2\sqrt{6}}{16} - \frac{1}{12}} = a\sqrt{\frac{14+6\sqrt{5}}{48}} =$$

$$= a\sqrt{\frac{9+6\sqrt{5}+5}{3\cdot 16}} = \frac{a}{\sqrt{3}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{2a}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = a\,\frac{\cos^2 36^0}{\cos 30^0}.$$

Der Rauminhalt ist hiernach:

$$V_{20} = O_{20}\cdot\frac{\varrho}{3} = 5a^2\sqrt{3}\cdot\frac{2a}{3\sqrt{3}}\cos^2 36^0 = \frac{10a^3}{3}\cos^2 36^0.$$

c) Von der Kugel, die durch die Ecken gelegt wird, ist SS' ein Durchmesser $= 2r$, SA eine Sehne und die Pyramidenhöhe h der der Sehne anliegende Abschnitt des Durchmessers; also ist $2rh = a^2$, $r = a^2 : 2h$. Ferner ist $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2\sin 36^0}\right)^2} = \frac{a}{2\sin 36^0}\sqrt{4\sin^2 36^0 - 1}$

$$= \frac{a}{2\sin 36^0}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}-4}{4}} = \frac{a\sin 18^0}{\sin 36^0} = \frac{a}{2\cos 18^0},\text{ also } r = a\cos 18^0.$$

d) Zur Berechnung der Winkel zwischen den Ebenen benutzt man das Dreikant BA, BS, BC, das man durch die Winkelhalbierende von ABC in zwei rechtwinkelige Dreikante mit den Kantenwinkeln 60^0 und 54^0 zerlegt (S. 40, 1).

III. Abschnitt.

Abbildung von einer Ebene auf eine sie schneidende Ebene. Kegelschnitte.

Siebentes Kapitel.

Abbildung geradliniger Figuren und Abbildung des Kreises als Kreis.

§ 29. Abbildung von Punkten und Geraden.

1. Wird eine ebene Figur von einem Punkt, Strahlpunkt (Projektionscentrum) aus bestrahlt, so bestimmen die Schnittpunkte der Strahlen auf einer zweiten, die erstere schneidenden Ebene ein Bild (eine Projection) der Figur. Für die geometrischen Beziehungen beider Figuren ist es gleichgiltig, welche von beiden Vorlage (Original) und welche Bild genannt wird; es wird eben einfach die eine Figur als bestrahlt von der andern (oder als perspektiv zu ihr) bezeichnet. Eine Figur heifst ein Bild einer andern (bestrahlbar oder projektiv zu ihr), wenn beide in diese Lage gegenseitiger Bestrahlung von einem Strahlpunkt aus gebracht werden können.

Bei der geometrischen Abbildung werden nicht blos Halbstrahlen des Strahlpunkts berücksichtigt, auf denen je ein Punkt und sein Bild liegt, sondern auch solche Strahlen, bei denen die Vorlage und ihr Bild auf entgegengesetzten Halbstrahlen liegen.

Diese Art der Abbildung entspricht dem Sehen, indem das Auge den Vereinigungspunkt der Lichtstrahlen bildet; doch sind im Auge die Strahlen immer einseitig begrenzt.

2. Wie der Punkt durch einen Strahl, so wird die Gerade durch eine Strahlenebene (den Schein der Geraden, vgl. S. 1, 3a) abgebildet; das Bild der Geraden ist der Schnitt dieser Strahlenebene mit der Bildebene.

Nehmen wir den schon früher betrachteten Fall (§ 20) aus, dafs nämlich die Ebenen der Vorlage und des Bildes parallel sind, so schneiden einander stets beide Ebenen in einer Geraden, der Bildaxe (Projektionsaxe). Nun wird irgend eine Strahlenebene beide Ebenen

in entsprechenden Geraden schneiden, und diese müssen einander in einem Punkt der Axe treffen, da die Schnittgeraden dreier Ebenen durch einen Punkt gehen (S. 4, 1). Somit entsprechen einander die Sätze:

a) *Das Bild eines Punktes liegt auf dem Strahl vom Strahlpunkt nach dem Punkt.*

a′) *Das Bild einer Geraden ist eine Gerade, die sie auf der Bildaxe schneidet.*

Insbesondere gilt:

b) *Jeder Axenpunkt entspricht sich selbst als Bild.*

c) *Jede Parallele zur Axe wird als Parallele zur Axe abgebildet;* denn die Strahlenebene einer solchen Geraden schneidet die Ebene der Vorlage in einer Parallelen zur Schnittgeraden der Vorlage- und Bild-Ebene, daher auch ebenso letztere (S. 4, 1).

3. Die beiden Strahlen nach zwei Punkten A und B (Fig. 74) bestimmen mit dem Strahlpunkt eine Strahlenebene SAB, welche auch die Strecke AB und deren Bild $A_1 B_1$ enthält, d. h.:

a) *Liegt ein Punkt auf einer Geraden, so liegt sein Bild auf dem Bild der Geraden.*

b) *Das Bild der Geraden (Strecke) durch zwei Punkte ist die Gerade (Strecke) durch die Bilder beider Punkte.*

3′. Die Strahlenebenen zweier Geraden a und b (Fig. 74) bestimmen durch ihre Schnittgerade einen Strahl, auf welchem der Schnittpunkt ab der Geraden und der ihrer Bilder $a_1 b_1$ liegt, d. h.:

a′) *Geht eine Gerade durch einen Punkt, so geht ihr Bild durch das Bild des Punktes.*

b′) *Das Bild des Schnittpunktes (Winkels) zweier Geraden ist der Schnittpunkt (Winkel) der Bilder beider Geraden.*

Gemäſs 2 b folgt noch:

c) *Das Bild einer durch einen Punkt gehenden Geraden ist die Gerade vom Bild des Punktes nach dem Axenpunkt der Geraden.*

4. Wenn die Ecken eines Dreiecks ABC mit den Ecken eines zweiten Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ paarweise auf den Strahlen $s_1 s_2 s_3$ eines Punktes S liegen, so ist das eine Dreieck ein bestrahltes Bild des andern. Die beiden Ebenen ABC und $A_1 B_1 C_1$ schneiden einander in einer

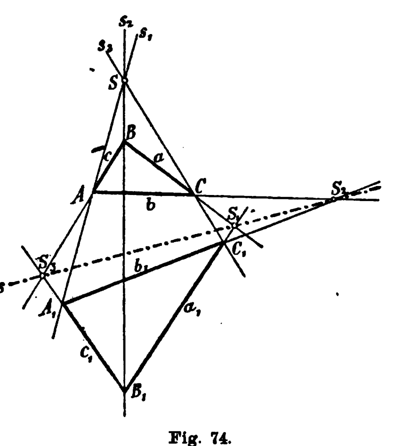


Fig. 74.

4′. Wenn die Seiten eines Dreiseits abc mit den Seiten eines zweiten Dreiseits $a_1 b_1 c_1$ paarweise in den Punkten $S_1 S_2 S_3$ einer Geraden s zusammentreffen, so ist das eine Dreiseit ein bestrahltes Bild des andern. Denn die drei Ebenen aa_1, bb_1, cc_1 schneiden einander in drei Geraden

Geraden, auf welcher, als der Axe, die Schnittpunkte der entsprechenden Seitenpaare der Dreiecke liegen müssen. Daraus folgt

(Satz von Desargues 1636):

Liegen die Ecken zweier Dreiecke paarweise auf drei Strahlen eines Punktes, so schneiden einander ihre Seiten paarweise in drei Punkten einer Geraden.

$s_1 s_2 s_3$, welche die Ecken der Dreiseite paarweise verbinden und als Schnittgeraden dreier Ebenen in einem Punkt zusammentreffen. Daraus folgt:

Gehen die Seiten zweier Dreiseite paarweise durch drei Punkte einer Axe, so liegen ihre Ecken paarweise auf drei Strahlen eines Punktes.

§ 30. Der Fluchtpunkt einer Geraden und die Fluchtgerade einer Ebene.

1. *Der Strahl des Strahlpunktes S, der parallel zu einer Geraden a_1 ist, bestimmt auf dem Bild a der Geraden einen Punkt F, der* Fluchtpunkt *genannt wird.*

Dies ist der einzige Punkt auf a, dem kein Punkt auf a_1 entspricht. Dagegen hat die Lage des Punktes F die Eigenschaft:

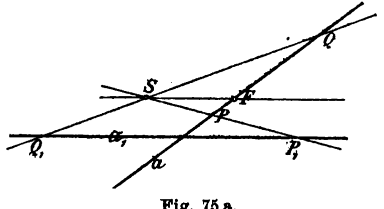
Je weiter ein Punkt P_1 oder *Q_1 auf der Geraden a_1 nach der einen oder andern Richtung hinausrückt, desto näher rückt sein Bild dem Fluchtpunkt — und umgekehrt.*

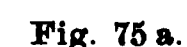
1'. *Die Strahlebene durch S, die parallel zur Ebene α_1 der einen Figur ist, bestimmt in der Bildebene α eine Gerade f, die* Fluchtgerade *genannt wird.* Nach S. 4, 30 folgt:

Die Fluchtgerade ist parallel der Bildaxe.

Sie ist die einzige Gerade in α, der keine Gerade in α_1 entspricht. Dagegen hat die Lage der Geraden f die Eigenschaft:

Je weiter eine Gerade p_1 oder q_1 parallel der Axe nach der einen oder andern Seite hinausrückt, desto näher rückt ihr Bild der Fluchtgeraden — und umgekehrt.




Fig. 75 a.

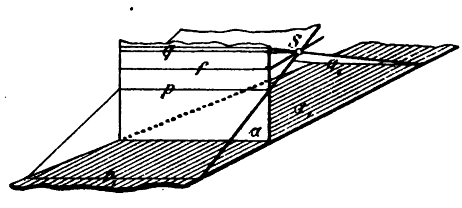


Fig. 75 b.

Man nennt deshalb den Punkt auch das Bild des unendlich fernen Punktes der Geraden a_1, als ob es nur einen unendlich

Man nennt deshalb die Gerade auch das Bild der unendlich fernen Geraden der Ebene α_1, als ob es nur eine unendlich ferne Gerade

fernen Punkt einer Geraden gäbe, da im übrigen jedem Punkt der Geraden a nur ein Punkt auf a_1 entspricht.

Wie es auf der Geraden a einen Fluchtpunkt F zu der Geraden a_1 giebt, so giebt es auf a_1 einen Fluchtpunkt zur Geraden a.

einer Ebene gäbe, da im übrigen jeder Geraden der Ebene α nur eine Gerade in α_1 entspricht.

Wie es in der Figur von α eine Fluchtgerade f zu der Figur auf der Ebene α_1 giebt, so giebt es in der Figur auf α_1 eine Fluchtgerade zur Figur in der Ebene α.

2. Zu irgend welchen Geraden a_1, b_1, c_1 einer Ebene α_1 sind die Strahlen der Fluchtpunkte parallel, $SF \parallel a_1$, $SV \parallel b_1$, $SW \parallel c_1$; sie liegen somit (S. 5, 3 b) in einer zu jener Ebene parallelen Strahlenebene, d. i. in der Ebene der Fluchtgeraden. Somit folgt:

Die Fluchtpunkte aller Geraden einer Ebene liegen auf der Fluchtgeraden der Ebene.

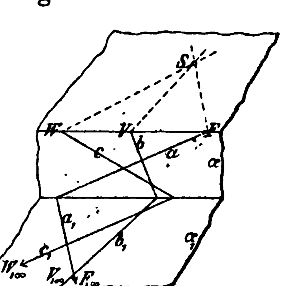


Fig. 76.

3. Da es (Fig. 77) für parallele Gerade $a_1 \parallel b_1$ durch S nur einen einzigen parallelen Strahl SF giebt, so folgt:

a) *Die Bilder von parallelen Geraden haben einen gemeinsamen Fluchtpunkt. Ein Parallelstrahlenbüschel wird als ein Strahlenbüschel abgebildet, dessen Scheitel der Fluchtpunkt zu den parallelen Geraden ist.*

Wir nennen in diesem Fall den Fluchtpunkt das Bild des allen Parallelen gemeinsamen unendlich fernen Punktes.

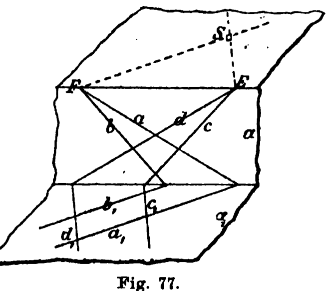


Fig. 77.

Sind a, b irgend welche einander in F schneidende Geraden, so können diese auch so abgebildet werden, dafs ihre Bilder a_1 und b_1 parallel werden. Die Bedingung dafür ist die, dafs die Bildebene dem Strahl des Scheitels SF parallel ist; daraus folgt:

b) *Irgend ein Strahlenbüschel kann als Parallelstrahlenbüschel abgebildet werden der Art, dafs der Scheitel des ersteren das Bild des unendlich fernen Punktes des letzteren ist.*

4. Mit Rücksicht auf 2 ergiebt sich noch weiter:

a) *Die Bilder von zwei oder mehreren Parallelstrahlenbüscheln einer Ebene sind ebensoviele Strahlenbüschel, deren Scheitel auf der Fluchtgeraden im Bild liegen.*

Dabei sind auszunehmen Parallele zur Bildaxe, die stets wieder als solche abgebildet werden (S. 75, 2 c).

Umgekehrt gilt:

c) *Jede Figur kann so abgebildet werden, daſs eine Gerade in ihr Fluchtgerade wird, m. a. W.: daſs das Bild einer Geraden in unendliche Entfernung hinausrückt. Irgend welche Strahlenbüschel, deren Scheitel in der Geraden liegen, werden dabei als ebensoviele Parallelstrahlenbüschel abgebildet.*

Es ist hierzu nur notwendig, daſs die Bildebene parallel zur Strahlenebene jener Geraden ist.

§ 31. Abbildung in der Ebene der Vorlage.

1. *Eine ebene Figur und das von ihr bestrahlte Bild auf einer zweiten Ebene bleiben in gegenseitiger Bestrahlung von einem Punkt, wenn eine der beiden Ebenen um die Bildaxe gedreht wird. Der Strahlpunkt beschreibt hierbei einen Kreis, dessen Ebene senkrecht zur Axe ist und dessen Mittelpunkt in der Fluchtgeraden der festen Ebene liegt.*

Ein Strahl SAA_1 treffe die Ebene α in A, die Ebene α_1 in A_1; AK sei eine Gerade der Ebene α, A_1K ihr Bild durch denselben Punkt K der Axe a. Dann giebt $SN \| A_1K$ den Fluchtpunkt N auf AK und $Nf \| a$ die Fluchtgerade f. Es sei noch $SF \perp f$ gezogen. Dreht man die Ebene aKA_1 nach aKA_2 und die Ebene SNF um denselben Winkel SFS_1 nach S_1NF, so bleibt $S_1N \| A_2K$ (S. 10, 4 b). Der Strahl S_1A_2 trifft die Gerade NK in dem Punkt, der die Strecke NK teilt im Verhältnis $S_1N : A_2K = SN : A_1K = AN : AK$, d. h. eben im Punkt A; also ist A_2 das Bild von A zu S_1 als Strahlpunkt. In gleicher Weise bleiben von allen Punkten der Ebene α die Bilder in der Ebene α_1 auch Bilder in der gedrehten Ebene α_2 zu S_1 als Strahlpunkt, wobei $FS_1 = FS \perp f$.

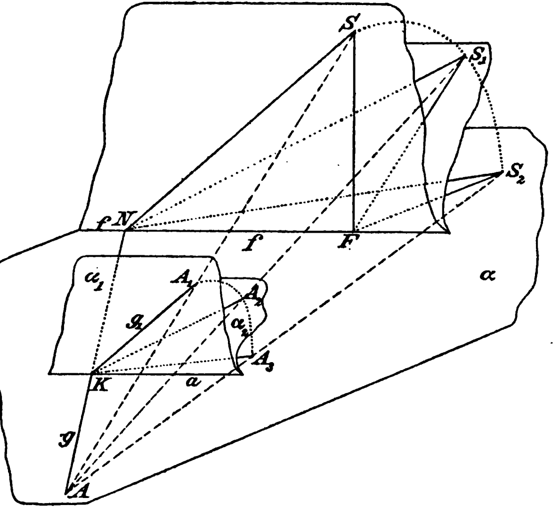


Fig. 78.

2. *Wird die Drehung um die Bildaxe so weit fortgesetzt, bis der Winkel beider Ebenen 0 oder 2 R beträgt, so entstehen zwei Figuren in einer einzigen Ebene in gegenseitig bestrahlter Lage.*

Wird nämlich die Drehung fortgesetzt, bis FS (nach FS_2) und KA_1 (nach KA_3) in die Ebene α fallen, so gilt auch für diesen Fall die gegebene Ableitung.

3. *Von einer ebenen Figur kann in derselben Ebene ein Bild entworfen werden zu jedem beliebigen Punkt S_2 der Ebene als Strahlpunkt und jeder beliebigen Geraden a als Bildaxe, so dafs jedem Punkt als Bild ein Punkt auf dem Strahl des Punktes entspricht und jeder Geraden eine Gerade, die sie auf der Axe schneidet. — Dabei kann noch auf dem Strahl eines einzigen Punktes A das Bild A_3 des Punktes beliebig gewählt werden (oder von einem Axenpunkt eine Gerade a_1 als Bild der Geraden a durch diesen Punkt).*

Zieht man nämlich von A und A_3 nach einem Punkt K auf a die Geraden AK und A_3K, dann $S_2N \parallel KA_3$ und $NF \parallel a$, und dreht man nun das Dreieck FNS_2 um FN beliebig nach FNS und den Winkel aKA_3 nach $aKA_1 \parallel FNS$, so ist $KA_1 \parallel NS$, und SA_1 teilt KN im Verhältnis $SN : KA_1 = S_2N : KA_3 = NA : KA$, d. h. SA_1 geht durch A. Ein von S auf der Ebene aA_1 entworfenes Bild der Figur der Ebene aA giebt, nach aA_3 zurückgedreht, das Bild in der ursprünglichen Ebene mit den genannten Eigenschaften.

4. Für die Bestrahlung in einer einzigen Ebene gilt noch:

Bei der Bestrahlung zweier Figuren einer einzigen Ebene entspricht der Strahlpunkt sich selbst als Bild und ebenso jeder Strahl dieses Punktes.

5. Aus 3 folgt, dafs der Satz S. 75, 4 und 4′ auch für den Fall gilt, dafs beide Figuren in einer Ebene liegen. Sind im ersten Fall SAA_1, SBB_1 und SCC_1 drei Strahlen in einer Ebene, und bestimmt man die Axe als die Verbindungsgerade der Schnittpunkte von AB und A_1B_1, AC und A_1C_1, so sind B_1 und C_1 die Bilder von BC, und die Geraden BC und B_1C_1 schneiden einander als Vorlage und Bild auf der Axe. Ebenso ergiebt sich S. 75, 4′ leicht daraus, dafs die Bedingung des Lehrsatzes sich bei der Drehung um die Axe nicht ändert.

6. Da in einer Abbildung räumlicher Gebilde auf einer Ebene eine Gerade als Gerade, ein Schnittpunkt als Schnittpunkt abgebildet werden, so erhält man auch zwei gegenseitig bestrahlte Figuren in einer Ebene, indem man zwei solche Figuren zweier Ebenen durch Bestrahlung von irgend einem weiteren Strahlpunkt oder auch durch parallele Bestrahlung auf einer Ebene abbildet. Der Strahlpunkt in dieser Abbildung ist das Bild des Strahlpunktes jener beiden Figuren, die Axe das Bild ihrer Bildaxe.

Es lassen sich umgekehrt zwei gegenseitig bestrahlte Figuren einer Ebene auch als Bild der Bestrahlung zweier Figuren in zwei Ebenen auffassen, wovon in unsern Figuren Gebrauch gemacht ist.

7. Als grundlegende Zeichenaufgaben schliefsen sich hier folgende an:

Es sei gegeben der Strahlpunkt S, die Bildaxe a und außerdem

ein Punkt P und sein Bild P_1; gesucht wird:	*eine Gerade g und ihr Bild g_1; gesucht wird:*
a) *zu einem zweiten Punkt Q das Bild Q_1.*	a') *zu einer zweiten Geraden h das Bild h_1.*
b) *zu einer Geraden g das Bild g_1.*	b') *zu einem Punkt P das Bild P_1.*

Zur Lösung beachte man mit Benutzung von S. 75, 3:

Das Bild eines Punktes wird bestimmt durch seinen Strahl und durch das Bild einer Geraden, die durch den Punkt geht.	*Das Bild einer Geraden wird bestimmt durch ihren Axenschnittpunkt und durch das Bild eines Punktes auf ihr.*

Es empfiehlt sich, Vorlage und Bild nicht blos durch die Marken an den Buchstaben, sondern auch durch Zeichnungen von verschiedener Farbe (Rot- und Blaustift) zu unterscheiden. Als wahrer Schnittpunkt zweier Geraden gilt dann nur der Schnittpunkt zweier Geraden von einerlei Farbe, abgesehen von den Axenpunkten, die mit beiden Farben zu bezeichnen sind.

8. Wenn eine Fluchtgerade gegeben ist, so kann diese wie die Axe zur Bestimmung des Bildes einer Geraden benutzt werden.

a) *Gehört die gegebene Gerade und Fluchtgerade derselben Figur an, so ist das Bild der Geraden parallel zu dem Strahl nach dem Schnittpunkt der Geraden und Fluchtgeraden.*

b) *Gehört die gegebene Gerade der einen Figur und die Fluchtgerade dem Bilde der Figur an, so ist das Bild des unendlich fernen Punktes der Geraden der Schnittpunkt des ihr parallelen Strahles mit der Fluchtgeraden.*

Im ersten Fall wird der Fluchtpunkt in unendliche Ferne hinausgestrahlt, im zweiten Fall wird der unendlich ferne Punkt der Geraden auf die Fluchtgerade herein gestrahlt.

Hiernach ergeben sich folgende grundlegende Aufgaben, bei denen angenommen ist, daſs *der Strahlpunkt S und die Axe a gegeben ist,* und daſs die Fluchtgerade mit f, ein Punktpaar mit PP_1, eine Geradepaar mit gg_1 bezeichnet wird.

Gegeben:	*Gesucht:*	*Gegeben:*	*Gesucht:*
1) $g, g_1,$	$f.$	4) $f, g_1,$	$g.$
2) $P, P_1,$	$f.$	5) $f, P,$	$P_1.$
3) $f, g,$	$g_1.$	6) $f, P_1,$	$P.$

§ 32. Vierseit und Viereck. Harmonische Teilung.

1. Vier Gerade einer Ebene $abcd$, von denen nicht drei durch einen Punkt gehen, bilden die vier Seiten eines vollständigen Vierseits; ihre Schnittpunkte bestimmen drei Paar Gegenecken und durch deren Verbindungsgeraden drei Nebenseiten.

Zeichnet man zu einem vollständigen Vierseit $abcd$ (Fig. 79) ein zweites der Art, dafs die Gegenecken L und M auf einer Nebenseite beiden Figuren gemeinsam sind und ebenso der Schnittpunkt R der zweiten Nebenseiten — indem man durch diesen Punkt R die beliebige Gerade RD_1B_1 zieht und auf ihr die Punkte B_1 und D_1 beliebig annimmt und mit L und M verbindet, — so liegen beide Figuren gegenseitig bestrahlt von dem Schnittpunkt der Geraden BB_1 und DD_1 als Strahlpunkt und der Nebenseite s als Axe. Denn die Geraden $a_1 b_1 c_1 d_1$ entsprechen als Verbindungsgeraden von Axenpunkten mit den Punkten B_1 und D_1 den Geraden $abcd$, die von denselben Axenpunkten durch B und D gehen. Daher liegt auch A_1C_1 bestrahlt von AC, und die Nebenseiten p und p_1 schneiden einander in einem Punkt P der Axe. Alle Vierseite, die mit $abcd$ die Punkte L, M und R gemeinsam haben, haben also auch den Punkt P gemeinsam.

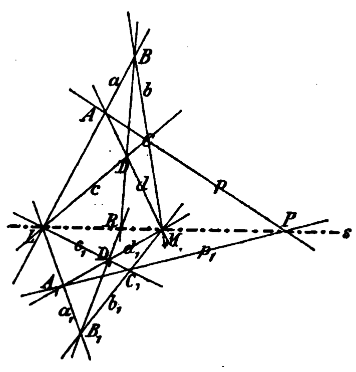


Fig. 79.

a) *Auf einer Nebenseite (Strecke zweier Gegenecken) eines vollständigen Vierseits ist durch den Schnittpunkt einer zweiten Nebenseite auch der Schnittpunkt der dritten bestimmt.*

Man nennt die Schnittpunkte R und P der beiden Nebenseiten ***harmonisch zugeordnet*** *in Bezug auf die Strecke LM der Gegenecken des Vierseits* — oder man sagt: *die Strecke zweier Gegenecken eines vollständigen Vierseits wird durch die andern Nebenseiten harmonisch geteilt.* (Vgl. II. T. § 18.)

Der Satz a) kann daher auch folgenden Ausdruck erhalten:

a') *Durch einen Teilpunkt einer Strecke ist der harmonisch zugeordnete Punkt bestimmt.*

Wie zu L, M und R der vierte harmonische Punkt P bestimmt wird, ergiebt obige Zeichnung des Vierseits $a_1 b_1 c_1 d_1$.

Da das Bild eines Vierseits stets wieder ein Vierseit ist, so folgt:

b) *Das Bild einer harmonisch geteilten Strecke ist wieder eine solche.*

Fafst man das Vierseit $pcds$ oder $PCDM$ in das Auge, so ist PD eine Nebenseite, die durch die Nebenseiten AL und CM harmonisch geteilt wird. Nun ist von B als Strahlpunkt die Strecke RP das Bild der Nebenseite PD, und M und L sind die Bilder der Teilpunkte dieser Strecke; also wird auch PR durch L und M harmonisch geteilt.

c) *Die Strecke zwischen zwei harmonisch zugeordneten Teilpunkten einer Strecke wird durch die Grenzpunkte der letzteren harmonisch geteilt.*

Man nennt deshalb alle vier Punkte harmonische; von ihnen sind je zwei getrennt liegende einander zugeordnet.

Die Strahlen nach vier harmonischen Punkten heifsen vier **harmonische Strahlen**; sie bestimmen auf jeder Schnittgeraden vier harmonische Punkte.

2. Vier Punkte einer Ebene $ABCD$, von denen nicht drei auf einer Geraden liegen, bilden die **Ecken eines vollständigen Vierecks**. Ihre Verbindungsgeraden ergeben drei Paar Gegenseiten und in deren Schnittpunkten drei **Nebenecken**.

Indem man zu einer Nebenecke als Strahlpunkt ein zweites Viereck zeichnet, das mit ersterem die beiden Gegenseiten der Nebenecke gemeinsam hat und überdies den Strahl nach einer zweiten Nebenecke, läfst sich wie in 1 beweisen, dafs im Winkel zweier Gegenseiten zugleich mit dem Strahl nach der zweiten Nebenecke auch der nach der dritten bestimmt ist. Es sind dies vier harmonische Strahlen.

3. Ein Vierseit $abcd$ (Fig. 77, S. 77) oder Viereck kann stets als ein Parallelogramm $a_1 b_1 c_1 d_1$ abgebildet werden (S. 77, 3):

a) *Wird ein vollständiges Vierseit (oder Viereck) so abgebildet, dafs eine Nebenseite (*oder *die Verbindungsgerade zweier Nebenecken) Fluchtgerade wird, so entsteht ein Parallelogramm.*

Umgekehrt:

b) *Das Bild eines Parallelogramms ist ein vollständiges Vierseit, von dem eine Nebenseite Fluchtgerade ist.*

4. Sind von den Grenzpunkten einer Strecke AC, von deren Mittelpunkt B und von dem unendlich fernen Punkt F_∞ der zugehörigen Geraden die Punkte A_1, B_1, C_1, F_1 auf einer zweiten Geraden bestrahlt, so sind B_1, F_1 harmonisch zugeordnet in Bezug auf die Strecke $A_1 C_1$. — Wir können nämlich eine Strecke $A_1 C_1$ (Fig. 81 a) stets als die Eckenlinie eines Parallelogramms und ihren Mittelpunkt P_1 als den Schnittpunkt der zweiten Eckenlinie auffassen; da das Bild einer solchen Figur ein vollständiges Vierseit ergiebt, in dem eine Nebenseite Fluchtgerade ist, also der Schnittpunkt R der Nebenseite Fluchtpunkt wird, so folgt, dafs das Bild von $A_1 P_1 C_1 R_{1\infty}$, nämlich $APCR$ vier harmonische Punkte sind.

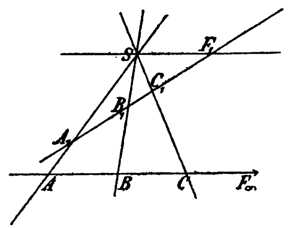


Fig. 80.

a) *Das Bild der Grenzpunkte einer Strecke, ihres Mittelpunktes und des unendlich fernen Punktes der Geraden sind vier harmonische Punkte.*

Umgekehrt kann zu vier harmonischen Punkten $APCR$ stets ein Vierseit gezeichnet und dies so abgebildet werden, dafs eine Nebenseite EF in unendliche Entfernung fällt, wodurch die Figur

als Parallelogramm $A_1 B_1 C_1 D_1$ abgebildet wird, in welchem die andern Nebenseiten einander halbieren. Daraus folgt:

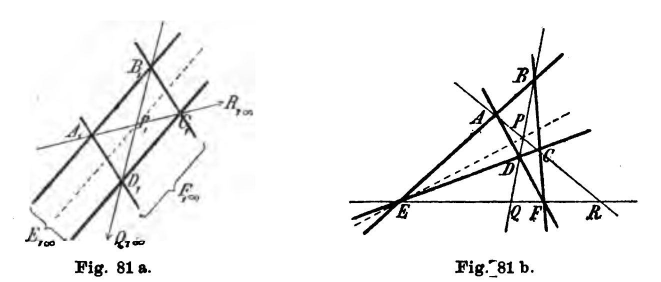


Fig. 81 a. Fig. 81 b.

b) *Rückt im Bild von vier harmonischen Punkten einer in unendliche Entfernung, so rückt das Bild des zugeordneten Punktes in die Mitte der beiden andern — und umgekehrt.*

5. Aus 4 a folgt in Bezug auf harmonische Strahlen:

a) *Die Strahlen aus einem Punkt nach den Grenzpunkten einer Strecke, nach ihrem Mittelpunkt und nach dem unendlich fernen Punkt der Geraden (d. i. der parallele Strahl) sind vier harmonische Strahlen,* woraus dann als besonderer Fall sich ergiebt:

b) *Zwei Strahlen eines Punktes bilden mit ihren beiden Winkelhalbierenden vier harmonische Strahlen.*

6. Die Abbildung ermöglicht, an Stelle der gegebenen Figuren einfachere Figuren mit bekannten Eigenschaften ins Auge zu fassen, wie Parallelogramme statt der Vierecke und Vierseite. Können wir an einem solchen einfachen Bilde Eigenschaften nachweisen, die bei der Abbildung erhalten bleiben, wie z. B. die, daſs drei oder mehrere Punkte auf einer Geraden liegen, oder daſs einander drei oder mehrere Gerade in einem Punkt (in endlicher oder unendlicher Entfernung) schneiden, oder daſs vier Punkte harmonische sind, so gelten diese Eigenschaften auch für die gegebene Figur.

§ 33. Abbildung des Kreises als Kreis.

1. Wird ein Kreis von einem Punkte bestrahlt, so ist die Gesamtheit der Strahlen, der Schein des Kreises, eine Kegelfläche. Wenn der Kreis von irgend einer Linie geschnitten wird, so geht der Strahl des Schnittpunktes, als gemeinsamer Strahl der Scheine beider Linien, auch durch den Schnittpunkt der Bilder dieser Linien; berührt eine Gerade den Kreis, d. h. sind die Schnittpunkte von Geraden und Kreis einander unmeſsbar nahe gerückt, so gilt das gleiche auch für die Bilder der Linien. Ganz allgemein gilt:

a) *Das Bild eines Schnittpunktes zweier Linien ist der Schnittpunkt der Bilder dieser Linien.*

b) *Das Bild einer Berührenden und ihres Berührungspunktes ist Berührende und Berührungspunkt in den Bildern der betr. Linien.*

2. Nimmt man auf dem Durchmesser AB (Fig. 82) eines Kreises irgend einen Punkt P und den ihm harmonisch zugeordneten Punkt Q an und zieht in beiden Punkten die Senkrechten des Durchmessers $MN \perp AB$, $QR \perp AB$, so heifsen P und QR in Bezug auf einander Pol und Polare, ebenso Q und MN.

Um nun als Bild des Kreises wieder einen Kreis zu erhalten und zwar so, dafs das Bild von P Mittelpunkt wird, ist der Strahlpunkt und die Bildebene folgendermafsen zu bestimmen. Man zieht erstens $SQ \perp QR$, macht zweitens $\overline{QS}^2 = QA \cdot QB$ und nimmt S als Strahlpunkt; drittens legt man die Bildebene parallel zur Ebene SQR.

Denn in der Kegelfläche, die den Kreis von S her bestrahlt, ist SAB der Hauptaxenschnitt, da SQ und AQ senkrecht zu QR, also Ebene $SAB \perp$ Ebene AQR ist (S. 7, 4 b); ferner wird ein durch ABS gelegter Kreis von QS berührt, da $\overline{QS}^2 = QA \cdot QB$ ist (II, § 10, 5); daher ist $\sphericalangle BSQ = BAS$ (I, § 29, 4 a), und da auch noch $A_1B_1 \parallel SQ$, so ist

$$\sphericalangle A_1B_1S = BSQ = SAB,$$

d. h. die Bildebene ist ein Wechselschnitt, somit ist ihr Schnitt mit der Kegelfläche ein Kreis (S. 54, 6).

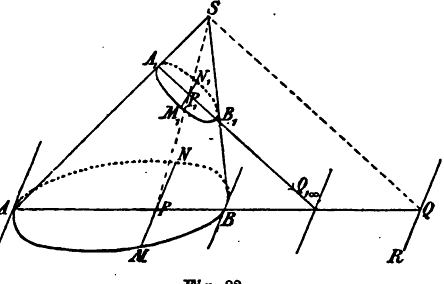


Fig. 82.

In diesem Bild ist A_1B_1 ein Durchmesser, und da das Bild von Q in unmefsbare Entfernung hinausrückt, so wird P_1 Mittelpunkt von A_1B_1, d. i. Mittelpunkt des Kreises. Wie $MN \perp AB$, so bleibt auch $M_1N_1 \perp A_1B_1$, da sowohl MN als $M_1N_1 \parallel QR$ und parallel der Axe (S. 76, 1').

Hierbei wurde P beliebig angenommen; ebensowohl hätte man von der Geraden QR ausgehen und darnach den Pol P bestimmen können. Hieraus ergiebt sich:

Ein Kreis kann stets als Kreis abgebildet werden, während eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) *Ein beliebiger Punkt im Innern des Kreises wird als Mittelpunkt abgebildet und seine Polare als unendlich ferne Gerade. Der Durchmesser des Punktes und die zu ihm senkrechte Sehne des Punktes werden als zwei zueinander senkrechte Durchmesser abgebildet.*

b) *Eine beliebige Gerade aufserhalb des Kreises wird als unendlich ferne Gerade abgebildet und ihr Pol als Mittelpunkt. Die Parallele durch den Pol und der zu ihr senkrechte Durchmesser werden als zwei zu einander senkrechte Durchmesser abgebildet.*

Anmerkung. Durch die vier Punkte ABB_1A_1 läfst sich ein Kreis legen (I § 39, 3), und dieser bestimmt als Hauptkreis eine Kugel, auf der die beiden Kreise um AB und A_1B_1 als Durchmesser liegen. Umgekehrt können irgend zwei Kreise einer Kugel (Fig. 83) als Wechselschnitte eines Kegels gelten. Die Bildaxe in P hat dann für beide Kreise die gleiche Potenz (S. 22, 4c; vgl. II. Teil § 10, 7), da jede Ebene durch einen Punkt der Axe auf der Kugel einen Kreis giebt und auf den Kreisflächen zwei Schnittgeraden, deren Abschnitte das gleiche Produkt ergeben. Die Bildaxe ist somit Potenzgerade. Durch die Drehung um die Axe können beide Figuren in eine Ebene gebracht werden: man erhält so die bestrahlte Lage zweier Kreise einer Ebene mit Bildaxe (II. T., 7. Kap.). Für den Strahlpunkt bleibt hierbei $SA \cdot SA_1 = SB \cdot SB_1$, woraus folgt, dafs er Ähnlichkeitspunkt wird.

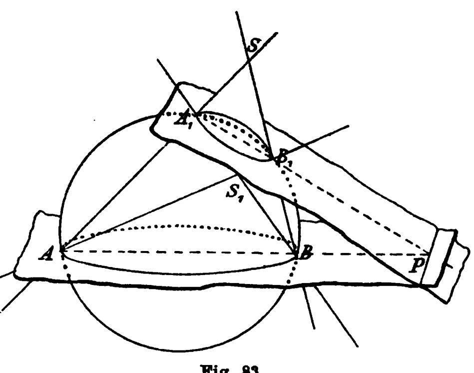


Fig. 83.

3. Wir bezeichnen als Abbildung I die Abbildung eines Kreises als Kreis der Art, dafs ein Punkt im Innern als Mittelpunkt abgebildet wird und seine Polare in unendliche Entfernung hinausrückt, — als Abbildung II die Abbildung des Kreises als Kreis der Art, dafs die Gerade durch einen Punkt aufserhalb des Kreises, die in ihm senkrecht steht zu seinem Strahl nach dem Mittelpunkt, in unendliche Entfernung hinausrückt; dafs hierbei die Polare des Punktes als Durchmesser abgebildet wird, der zur Richtung nach dem Punkt senkrecht steht, ist klar.

Wird von einem Punkt P aufserhalb des Kreises mit seinen beiden Berührenden eine Abbildung II entworfen, so werden die Berührenden im Bild parallel zur Richtung nach dem Punkt; die Polare zu P geht über in den auf den Berührenden senkrechten Durchmesser, also in die Verbindungsgerade der Berührungspunkte. Daher gilt für die gegebene Figur:

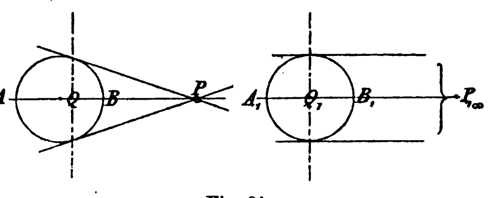


Fig. 84.

a) *Die Sehne zu zwei Berührenden ist Polare ihres Schnittpunktes.*

Je näher ein Punkt dem Umfang des Kreises liegt, desto näher auch seine Polare.

b) *Der Pol einer Berührenden ist ihr Berührungspunkt.*

4. a) *Die Sehnen auf den Strahlen eines Punktes werden durch ihn und seine Polare harmonisch geteilt.*

Denn wenn zunächst der Punkt P innerhalb des Kreises liegt, so bringt eine Abbildung I den Punkt in den Mittelpunkt P_1 der Sehne $C_1 D_1$ und den Schnittpunkt R der Polare in unendliche Entfernung, woraus die harmonische Teilung nach S. 82, 4a folgt. — Liegt der Punkt P aufserhalb des Kreises, so macht eine Abbildung II alle Strahlen durch ihn parallel, und die Polare des Punktes wird der zu dieser Richtung senkrechte Durchmesser, der die Sehnen halbiert, woraus wie oben die harmonische Teilung der Strahlen folgt.

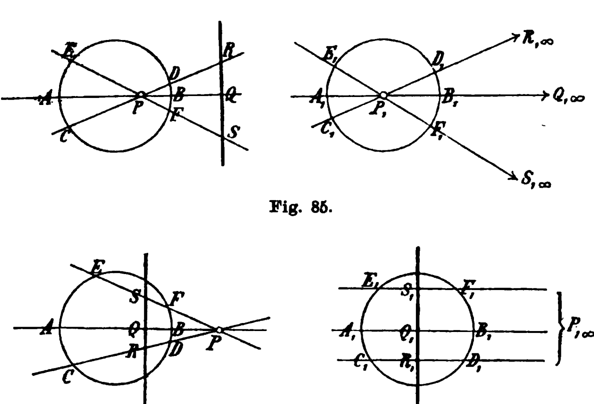


Fig. 85.

Fig. 86.

Da die harmonischen Punkte in dem Bilde eben solche bleiben, so folgt für den Fall, dafs der Kreis als Kreis abgebildet wird:

b) *Pol und Polare bleiben auch in dem Bilde Pol und Polare.*

Indem wir von der in § 30 eingeführten Redeweise Gebrauch machen, können wir nun dem in 2 betrachteten Fall der Abbildung auch folgenden Ausdruck geben:

c) *Der Mittelpunkt eines Kreises und die unendlich ferne Gerade entsprechen einander als Pol und Polare.*

d) *Ein Kreisdurchmesser und der unendlich ferne Punkt auf der zu ihm senkrechten Richtung entsprechen einander als Polare und Pol.*

5. Ziehen wir einen Kreis und in seinen Schnittpunkten mit den Strahlen eines gegebenen Punktes P die Berührenden, so macht eine Abbildung I, falls der Punkt innerhalb des Kreises liegt, ihn zum Mittelpunkt P_1. Hierdurch werden die Sehnen als Durchmesser und die Berührenden als

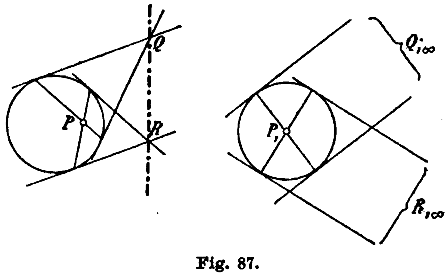


Fig. 87.

Parallelen abgebildet, deren Fluchtpunkt in der ersten Figur auf der Fluchtgeraden, d. i. auf der Polaren zu P liegt. — Falls der gegebene Punkt P aufserhalb liegt (Fig. 88), macht eine Abbildung II die Strahlen des Punktes parallel, die Polare des Punktes zu einem Durchmesser, der auf dieser Richtung senkrecht steht und der, als Mittellinie der Figur, den Schnittpunkt der Berührenden auf seiner Verlängerung enthält. Daher liegt der Schnittpunkt in der ursprünglichen Figur ebenfalls in der Polare des Punktes.

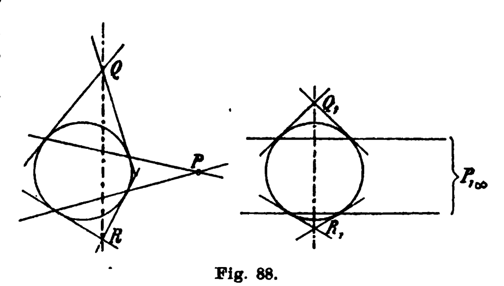


Fig. 88.

Die Berührenden in den Schnittpunkten eines jeden Strahles von einem Punkt schneiden einander auf der Polare des Punktes.

6. Bestimmt man von beliebigen Strahlen eines Punktes im Innern des Kreises die Pole, so macht eine Abbildung I die Strahlen zu Durchmessern und bringt deren Pole in unendliche Entfernung, zwingt also die Pole in der Vorlage auf die Polare des gegebenen Punktes. Liegt der Punkt aufserhalb des Kreises, so macht eine Abbildung II die Strahlen parallel und bringt deren Pole auf den zu ihnen senkrechten Durchmesser, das Bild der Polare des Punktes. In beiden Fällen folgt:

a) *Für alle Strahlen eines Punktes liegen die Pole auf der Polare des Punktes.*

a′) *Für alle Punkte einer Geraden gehen die Polaren durch den Pol der Geraden.*

§ 34. Der Kreis mit Viereck und Vierseit, Sechseck und Sechsseit.

1. Entwirft man (Fig. 89) das Bild eines Kreises mit dem Sehnenviereck $ABCD$ so, dafs der Kreis als Kreis abgebildet wird, während die Nebenecke R, die innerhalb des Kreises liegt, Mittelpunkt wird, so werden AC und BD Durchmesser, und jeder Umfangswinkel über ihnen wird ein Rechter; somit wird das Bild des Sehnenvierecks ein Rechteck, und die Bilder der Nebenecken Q und S fallen in unendliche Entfernung, da die Seiten paarweise parallel werden. Es ist somit R der Pol zu QS. Da zugleich

1′. Entwirft man (Fig. 89) das Bild eines Kreises mit dem berührenden Vierseit $abcd$ so, dafs der Kreis als Kreis abgebildet wird, während die Nebenseite r_1, die aufserhalb des Kreises liegt, in unendliche Entfernung fällt, so wird das Bild des Vierseits ein Parallelogramm; aus der Gleichheit seiner Gegenseiten und der der Abschnitte der Berührenden von einem Punkt folgt, dafs alle Seiten gleich und das Vierseit eine Raute. Der Schnittpunkt R der beiden andern Nebenseiten wird als Schnittpunkt

das Bild von RQ ein zu dem Bild von RS senkrechter Durchmesser ist, so ist auch S der Pol zu RQ, ebenso Q der Pol zu RS.

der Eckenlinien der Raute zugleich Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises. Daher ist r_1 Polare zu R. Da zugleich die andern Nebenseiten als zu einander senkrechte Durchmesser abgebildet werden, so ist A_1C_1 Polare zu Q und B_1D_1 Polare zu S.

In dem Sehnenviereck ist die Verbindungsgerade zweier Nebenecken Polare der dritten Nebenecke.

In dem berührenden Vierseit ist der Schnittpunkt zweier Nebenseiten Pol der dritten Nebenseite.

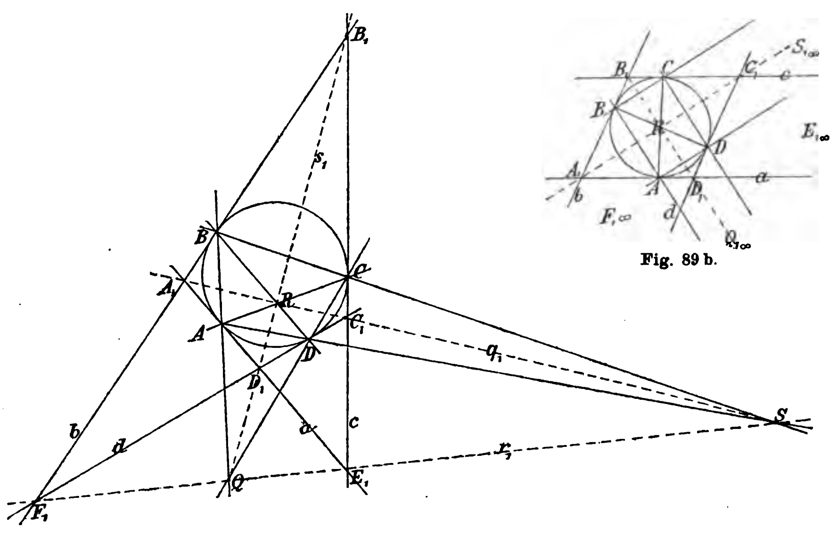


Fig. 89 b.

Fig. 89 a.

2. Ziehen wir noch in den Ecken des Vierecks $ABCD$ die Berührenden, so folgt ebenfalls leicht aus dem Bild, daſs die Schnittpunkte der Berührenden zweier Punkte auf den Geraden RS, SQ, QR liegen.

2'. Zeichnen wir noch das durch die Berührungspunkte bestimmte Sehnenviereck, so folgt aus dem Bild, daſs die Berührungssehnen je zweier Seiten einander paarweise in den Schnittpunkten $r_1 s_1$, $s_1 q_1$, $q_1 r_1$ schneiden.

Vier Punkte eines Kreises und deren Berührenden bestimmen ein Sehnenviereck und ein berührendes Vierseit,

in denen die Nebenseiten des letztern auf die Verbindungsgeraden der Nebenecken des ersteren fallen.

in denen die Nebenecken des ersteren in die Schnittpunkte der Nebenseiten des letzteren fallen.

3. Sechs Punkte eines Kreises 123456 bestimmen durch die Ver-

3'. Sechs Berührende eines Kreises $I\,II\,III\,IV\,V\,VI$ bestim-

bindungsgeraden je zweier aufeinander folgenden Punkte ein Sechseck. Für die Schnittpunkte der drei Paare von Gegenseiten, P von *12* und *45*, Q von *23* und *56*, R von *34* und *61* gilt der Satz von Pascal (1640):

In jedem Sehnensechseck eines Kreises liegen die Schnittpunkte der drei Paare von Gegenseiten auf einer Geraden.

men durch die Schnittpunkte je zweier aufeinander folgenden Geraden ein Sechsseit. Für die Verbindungsgeraden der drei Paare von Gegenecken, p von *I II* und *IV V*, q von *II III* und *V VI*, r von *III IV* und *VI I* gilt der Satz von Brianchon (1806):

In jedem berührenden Sechsseit eines Kreises gehen die Verbindungsgeraden der drei Paare von Gegenecken durch einen Punkt.

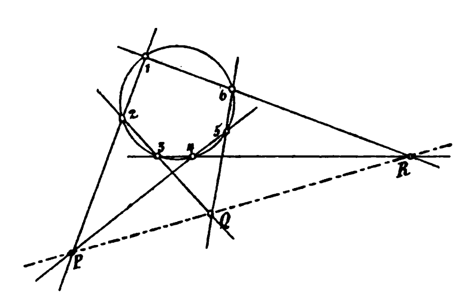


Fig. 90 a.

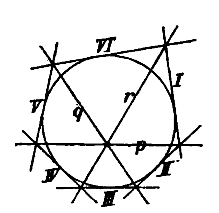


Fig. 91 a.

Um zunächst den Satz vom Sechseck zu beweisen, bilden wir den Kreis so als Kreis ab, dafs die Gerade PQ in unendliche Entfernung rückt, dafs also *12* ∥ *45*, *23* ∥ *56* wird. Da dann Bogen *234* = *561* und *612* = *345* ist (I § 28, 4), so ergiebt die Summe, dafs Bogen *61234* = *34561*. Zieht man diese Bögen von dem ganzen Umfang ab, so folgt: Bogen *456* = *123*, somit *61* ∥ *34*, d. h. der Schnittpunkt dieser beiden Geraden liegt in dem Bild ebenfalls auf der unendlich fernen Geraden. Daher mufs in der ersten Figur der Schnitt R auf der Fluchtgeraden PQ liegen.

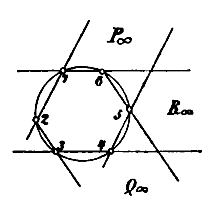


Fig. 90 a_1.

Der Lehrsatz gilt jedoch nicht blos für den Fall, dafs die sechs Punkte in der Ordnung des Umlaufs der Kreislinie aufeinander folgen; *die Reihenfolge ist willkürlich.* Dabei kann die Schnittgerade, die sog. Pascal'sche Gerade, möglicher Weise den Kreis schneiden, sodafs die angegebene Abbildung nicht möglich ist. Liegt nur ein Schnittpunkt aufserhalb des Kreises, wie in Fig. 90, b der von *34* und *61*, so bilde man so ab, dafs, während das Bild des Kreises Kreis bleibt, der Schnittpunkt von *34* mit *61* in unendliche Entfernung fällt. Dann ist Bogen *14* = *36*, also Bogen *614* = *361*, somit ∢ *5* = ∢ *2*,

$QP25$ ein Sehnenviereck, sodaſs nun auch $\sphericalangle\, QP5 = Q25 = \sphericalangle\, 325 = 345$, $\sphericalangle\, QP5 = 345$, $QP \parallel 34 \parallel 61$; hieraus aber folgt, daſs in der ersten Figur 61, 34 und PQ durch einen Punkt gehen.

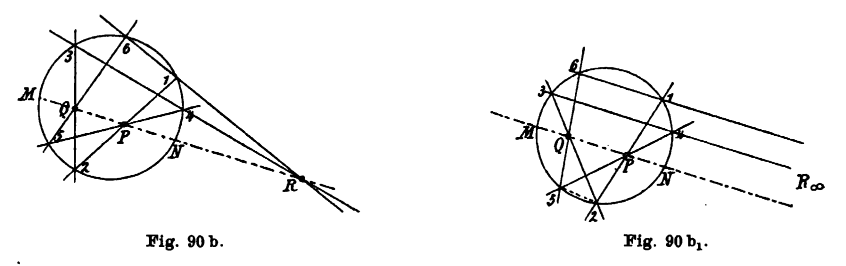


Fig. 90 b. Fig. 90 b_1.

Fallen alle drei Schnittpunkte in den Kreis, wie in Fig. 90c, so bilden wir den Kreis als Kreis so ab, daſs in dem Sechseck

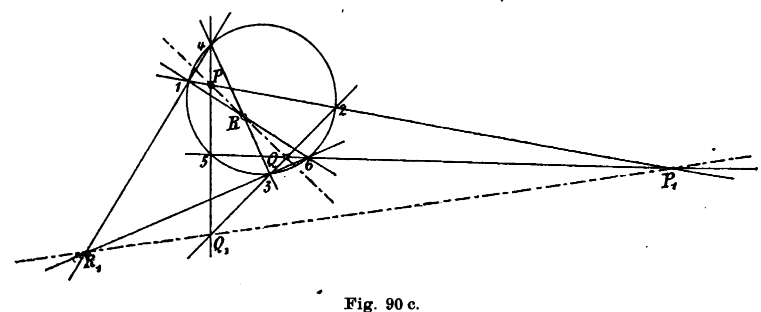


Fig. 90 c.

123654 der Schnittpunkt P_1 von 12 und 65 und der Schnittpunkt Q_1 von 23 und 54 in unendliche Entfernung fallen, daſs also $12 \parallel 65$, $23 \parallel 54$ wird. Dann ist Bogen $15 = 62$, $53 = 24$, also $153 = 624$,

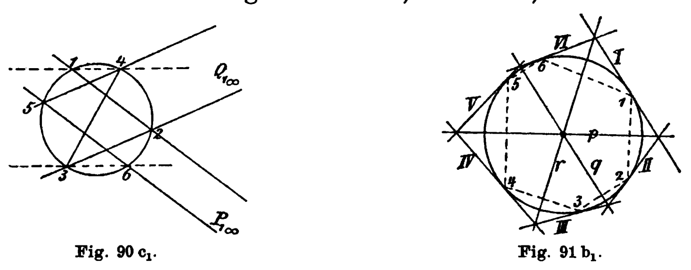


Fig. 90 c_1. Fig. 91 b_1.

somit $36 \parallel 41$, woraus folgt, daſs der Schnittpunkt R von 41 und 36 in der ersten Figur auf der Geraden $P_1 Q_1$ liegt. Dann liegt das Dreiseit $14P$ bestrahlt von $63Q$ (nach S. 75, 1′). Daher geht die Gerade 61 durch den Schnittpunkt R von PQ und 34 als dem Strahlpunkt.

Wenden wir uns zweitens zu dem berührenden Sechsseit, so wird in einem Bild des Kreises als Kreis, in dem zwei Paar Berührungssehnen

parallel sind, nach Vorangehendem auch das dritte Paar parallel; also fallen die Verbindungsgeraden der Kreismitte mit zwei gegenüberliegenden Schnittpunkten der Berührenden aufeinander (I, § 27, 5); somit schneiden einander die drei Verbindungsgeraden der gegenüber liegenden Schnittpunkte im Mittelpunkt, daher auch in der ersten Figur in einem Punkt.

Übrigens sind auch p, q, r die Polaren der Schnittpunkte der Berührungsehnen zu *I II* und *IV V*, *II III* und *V VI*, *III IV* und *VI I*. Da diese Schnittpunkte auf einer Geraden liegen (nach dem Satz von Pascal), so schneiden einander pqr in einem Punkt (S. 87, 6a').

Achtes Kapitel.

Die Kegelschnitte als Bilder des Kreises.

§ 35. Arten der Kegelschnitte.

1. *Kegelschnitt heifst jedes Bild eines Kreises sowie das Bild eines solchen Bildes* (den Kreis selbst natürlich mit eingeschlossen).

Alle Eigenschaften des Kreises und der Figuren am Kreis, die bei der Abbildung sich nicht ändern, haben ihre Giltigkeit für die Kegelschnitte. Gemäfs S. 83, 1 folgt somit:

a) *Eine Gerade in der Ebene eines Kegelschnittes schneidet diesen entweder in zwei Punkten, oder sie berührt ihn, oder sie hat keinen Punkt mit dem Kegelschnitt gemein.*

b) *Von einem Punkt in der Ebene eines Kegelschnittes können an diesen entweder zwei Berührende gezogen werden, oder keine, oder eine — das letztere nämlich, sobald der Punkt auf dem Kegelschnitt selbst liegt.*

Im ersteren Fall sagt man, der Punkt liege aufserhalb des Kegelschnittes, im zweiten Fall innerhalb.

2. Wird ein Kreis oder Kegelschnitt so abgebildet, dafs eine Gerade, die ihn nicht schneidet, Fluchtgerade wird, so hat das Bild keinen unendlich fernen Punkt und heifst Ellipse (Fig. 92a); berührt die Fluchtgerade die Vorlage, so hat das Bild einen unendlich fernen Punkt und eine unendlich ferne Berührende und heifst Parabel (Fig. 92b); schneidet die Fluchtgerade die Vorlage, so hat das Bild zwei unendlich ferne Punkte und heifst Hyperbel (Fig. 92c). Im letzten Fall heifsen die Bilder der Berührenden jener Schnittpunkte die Asymptoten des Kegelschnittes; dieselben sind als Berührende aufzufassen, deren Berührungspunkte in unendliche Ferne hinaus-

gerückt sind, denen sich also der Kegelschnitt mehr und mehr nähert, ohne sie in endlicher Entfernung zu erreichen.

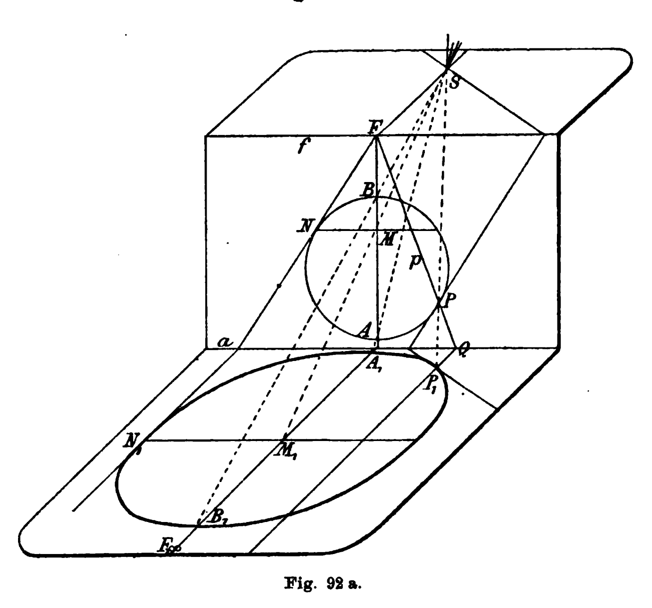


Fig. 92 a.

Da bei einer Abbildung nur eine Gerade in unendliche Entfernung hinausrücken kann und umgekehrt unendlich ferne Punkte im Bild wieder hereinkommen, so folgt aus a, daſs jeder Kegelschnitt einer der drei genannten Formen angehören muſs.

3. Ist S der Strahlpunkt, a die Bildaxe und f die Fluchtgerade, so findet man zu einem Punkt P der Vorlage das Bild, indem man durch den Punkt P eine Gerade p in der Vorlage zieht, die die Axe in Q, die Fluchtgerade in F schneide. Das Bild dieser Geraden ist die durch Q parallel zu SF gezogene Gerade. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Strahl SP ist das Bild des Punktes P. Wählt man als Gerade p die Berührende in P, so ist deren Bild ebenfalls Berührende.

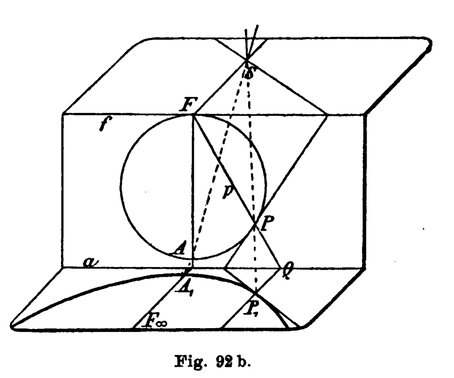


Fig. 92 b.

4. Bei der Ellipse und Parabel erhält man alle Punkte des Bildes durch die Halbstrahlen des Strahlpunktes nach den Punkten der Vorlage; bei der Hyperbel dagegen erhält man nur den Teil einerseits der

Fluchtgeraden auf diese Weise, den andern Teil aber durch die Gegenstrahlen der betr. Punkte. Deshalb liegen bei der Ellipse und Parabel wie beim Kreis alle Punkte des Kegelschnittes einerseits von einer Geraden, die den Kegelschnitt in einem Punkt berührt oder in keinem Punkt trifft; dagegen besteht die Hyperbel aus zwei Teilen, die je auf den Gegenseiten solcher Geraden liegen.

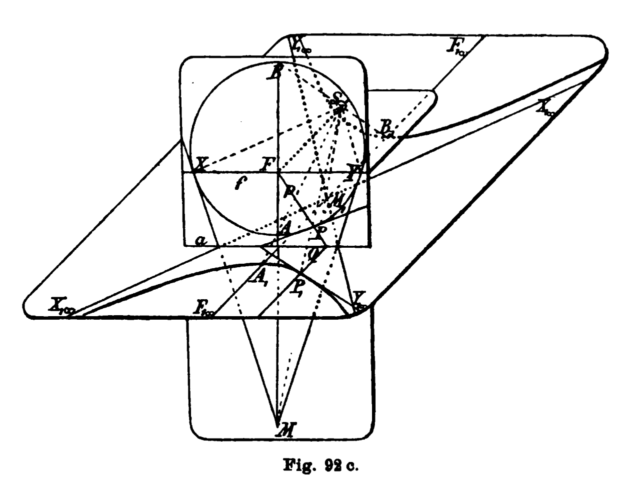


Fig. 92 c.

§ 36. Mittelpunkt, Durchmesser und zugeordnete Sehnen.

1. Die Bilder harmonischer Punkte sind wieder solche; somit folgt aus S. 86, 4 a:

a) *Auf allen Strahlen eines Punktes, die einen Kegelschnitt schneiden, werden die Sehnen durch den Punkt und eine einzige Gerade harmonisch geteilt.*

Diese Gerade, auf welcher die dem Punkt harmonisch zugeordneten Punkte liegen, heifst die Polare des Punktes; der Punkt selbst heifst ihr Pol.

Auch die in § 33, 3, 5 u. 6 und § 34 gegebenen Sätze gelten für die Kegelschnitte, da sie sich nur auf Pol und Polare und die Schnittpunkte von Geraden beziehen.

b) Zur *Bestimmung der Polare eines Punktes P* kann daher ein *Sehnenviereck* gezeichnet werden, von dem der Punkt eine Nebenecke ist; die Polare ist dann die Verbindungsgerade der beiden andern Nebenecken.

c) Liegt der Punkt aufserhalb des Kegelschnittes, so ist damit auch die Aufgabe gelöst, *für die*

b') Um *zu einer beliebigen Geraden den Pol zu finden*, nimmt man zwei Punkte der Geraden als Ecken eines berührenden *Vierseits;* der Schnittpunkt der beiden andern Nebenseiten giebt dann den gesuchten Pol.

c') Schneidet die Gerade den Kegelschnitt, so ist hiernach auch die Aufgabe gelöst, *für die in den*

von dem Punkt ausgehenden Berührenden die Berührungspunkte zu bestimmen. Es können hierzu auch drei Strahlen des Punktes benützt werden.

Grenzpunkten einer Sehne gezogenen Berührenden den Schnittpunkt zu finden.

2. Bei der Abbildung eines Kreises oder Kegelschnittes wird immer das Bild einer Geraden der Vorlage in unendliche Entfernung hinausrücken, nämlich das Bild der Fluchtgeraden f, welche durch die zur Bildebene parallele Strahlebene bestimmt ist. Auf den Strahlen durch den Pol M (Fig. 93) der Fluchtgeraden rücken die ihm harmonisch zugeordneten Punkte im Bild in unendliche Entfernung, somit das Bild des Punktes selbst in die Mitte aller durch ihn gezogenen Sehnen. Bei der Ellipse liegt dieser Mittelpunkt im Innern, da die Fluchtgerade die Vorlage nicht schneidet; bei der Hyperbel liegt er aufsen, im Schnittpunkt der Asymptoten, da diese die Bilder der Berührenden in den Schnittpunkten XY der Fluchtgeraden sind, somit (nach S. 85, 3 a) ihr Schnittpunkt Pol der Berührungssehne ist. Bei der Parabel ist der Pol der Fluchtgeraden ihr Berührungspunkt (nach S. 86, 3 b), sein Bild fällt somit ebenfalls in unendliche Entfernung.

a) *Die Ellipse und die Hyperbel hat einen Mittelpunkt, das Bild des Poles der Fluchtgeraden der Vorlage. In der Hyperbel ist der Schnittpunkt der Asymptoten der Mittelpunkt.*

3. Alle durch den Mittelpunkt eines Kegelschnittes gezogenen Sehnen heifsen Durchmesser desselben. In der Parabel heifsen Durchmesser die zu einander parallelen Halbstrahlen nach dem unendlich fernen Punkt, d. h. die Bilder der Sehnen des Berührungspunktes der Fluchtgeraden.

Da ein Durchmesser AB das Bild einer Sehne AB ist, die durch den Pol M der Fluchtgeraden geht, so müssen die Berührenden in A

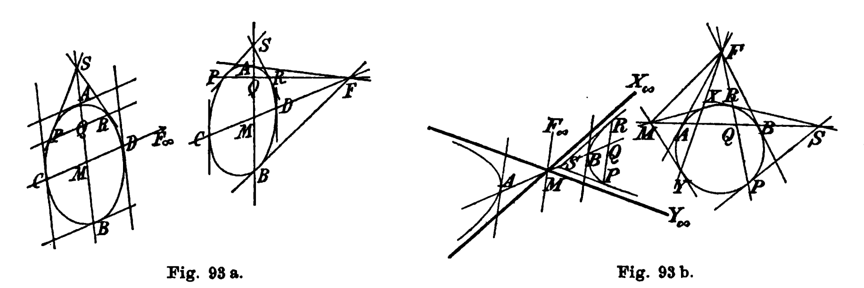


Fig. 93 a. Fig. 93 b.

und B sich in der Vorlage auf der Polare zu M schneiden (S. 86, 5), d. i. auf der Fluchtgeraden, sie müssen also im Bild parallel sein.

a) *Die Berührenden an den Grenzpunkten eines Durchmessers sind parallel.*

Die Richtung der Berührenden an dem Grenzpunkte eines Durchmessers heifst **diesem Durchmesser zugeordnet** (konjugiert); ebenso heifst jede mit der Berührenden parallele Sehne PR.

In der Vorlage schneiden einander diese Berührenden und Sehnen in F auf der Fluchtgeraden, und AB teilt als Polare zu F die Sehne PR harmonisch in Q. Im Bild fällt F in unendliche Entfernung; somit fällt der zugeordnete Punkt Q in die Mitte der Sehne.

b) *Ein Durchmesser halbiert alle ihm zugeordneten Sehnen,* und umgekehrt:

c) *Wird eine Sehne von einem Durchmesser halbiert, so ist sie ihm zugeordnet.*

4. Da die zu AB zugeordnete Sehne PR in der Vorlage durch den Pol F der Geraden AB geht, so müssen die Berührenden in den Grenzpunkten von PR einander in der Polare des Punktes F, d. i. auf der Geraden AB schneiden (S. 86, 5). D. h.:

a) *Die Berührenden in den Grenzpunkten der einem Durchmesser zugeordneten Sehnen schneiden einander paarweise auf dem Durchmesser.*

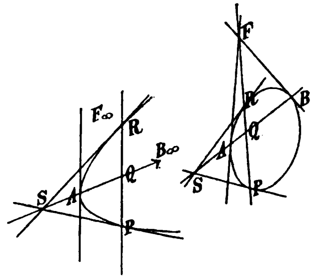


Fig. 93 c.

Insbesondere müssen hiernach die Berührenden in den Grenzpunkten des zugeordneten Durchmessers CD einander in dem unendlich fernen Punkt des ersten Durchmessers AB schneiden; daher ist dieser dem Durchmesser CD zugeordnet. Damit ist bewiesen:

b) *Wenn ein Durchmesser einem andern zugeordnet ist, so ist auch letzterer dem ersteren zugeordnet.*

5. Verbindet man den Punkt S (Fig. 93) mit der Mitte Q der Sehne PR der zugehörigen Berührenden, so erhält man die Richtung eines Durchmessers SQ (3 c und 4 a), dem die Sehne PR, die Polare zu S, (S. 85, 3 a) zugeordnet ist.

Die Polare eines Punktes hat die dem Durchmesser desselben zugeordnete Richtung.

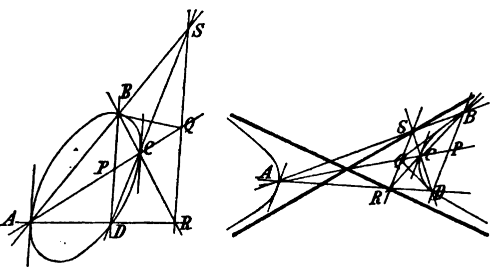


Fig. 94 a und 94 b.

Für den inneren Punkt P (Fig. 94) und dessen äufsere Polare RS gilt nämlich dasselbe, da die letztere die dem Durchmesser APC zugeordnete Sehne BPD harmonisch teilt; der Schnittpunkt mit der Polare mufs in unendliche Entfernung fallen, da P Mittelpunkt ist.

6. Für die Parabel und Hyperbel ergeben sich besondere Eigenschaften in Bezug auf die unendlich ferne Berührende oder Schneidende. So folgt für die Parabel, in der BD Polare zu Q ist und $QAPC_\infty$ ein Durchmesser, in der also ein Grenzpunkt des Durchmessers in unendliche Entfernung rückt, die Gleichheit $QA = AP$, d. h.:

a) *Die Parabel halbiert die Strecke vom Schnittpunkt zweier Berührenden nach dem Mittelpunkt der Berührungssehne.*

Fig. 95.

In der Hyperbel sind die Asymptoten MX_∞ und MY_∞ (Fig. 93, b) die Bilder der Berührenden MX und MY der Fluchtgeraden XY, und ein Durchmesser ist das Bild einer Sehne AB, die durch M geht und deren Pol F der Schnittpunkt der Fluchtgeraden mit den Berührenden in A und B ist. Daher wird XY durch F und AB harmonisch geteilt; MF, MX, MA und MY sind vier harmonische Strahlen in Vorlage und Bild. D. h.:

b) *In der Hyperbel bilden die Asymptoten mit einem Durchmesser und der zugeordneten Richtung vier harmonische Strahlen.*

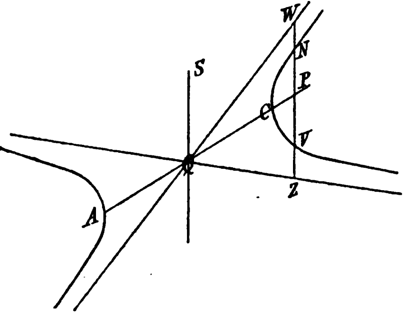


Fig. 96.

Hieran schliefst sich ein für die Bestimmung von Punkten der Hyperbel brauchbarer Satz:

c) *Die Abschnitte einer Geraden zwischen der Hyperbel und ihren Asymptoten sind einander gleich.*

Denn die Sehne VN wird durch den zugeordneten Durchmesser QP halbiert, $NP = PV$, und ebenso der Abschnitt der Geraden zwischen den Asymptoten, $WP = PZ$, da der zu P harmonisch zugeordnete Punkt in unend-

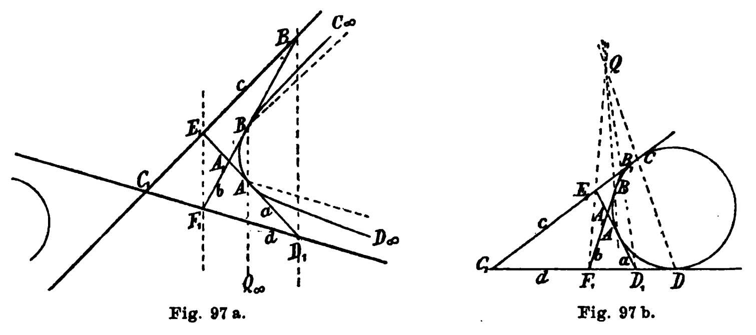


Fig. 97 a. Fig. 97 b.

liche Entfernung fällt, weil der zugeordnete Durchmesser $QS \parallel WZ$ ist. Daher ist $WP - NP = PZ - PV$ oder $WN = VZ$.

Eine ebenso einfache Beziehung, wie die eben abgeleitete, ergeben auch zwei Berührende a und b (Fig. 97) und die Asymptoten c, d. Diese vier Geraden bilden ein berührendes Vierseit $A_1 B_1 C_1 D_1$, wobei eine Seite des zugehörigen Sehnenvierecks $A B C_\infty D_\infty$ in unendlicher Entfernung liegt. Daher mufs (nach S. 88, 2') der Schnittpunkt der Nebenseiten $B_1 D_1$ und $E_1 F_1$ in den Schnittpunkt von AB und $C_\infty D_\infty$, d. i. in unendliche Entfernung fallen, m. a. W.:

d) *Die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte zweier Berührenden der Hyperbel mit den Asymptoten sind parallel (der Berührungssehne).*

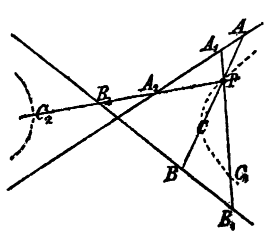


Fig. 98 a.

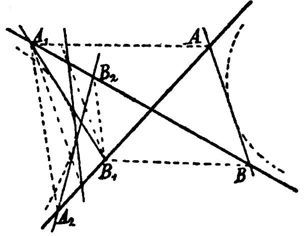


Fig. 98 b.

Hiernach lassen sich *zu den Asymptoten und einem gegebenen Punkt (oder einer gegebenen Berührenden) weitere Punkte oder Berührende zeichnen,* wie in Fig. 98 a und b angedeutet.

§ 37. Bestimmung der Kegelschnitte durch Punkte und Berührende.

1. Die *für alle Kegelschnitte geltenden Sätze von Pascal und Brianchon* (S. 89, 3 und 3') können dazu dienen, die Aufgaben zu lösen:

Zu fünf Punkten eines Kegelschnitts ist ein sechster zu finden.

Die fünf gegebenen Punkte seien 12345, und der gesuchte Punkt sei der Schnittpunkt eines beliebig durch 5 gezogenen Strahles mit dem Kegelschnitte. Der Schnittpunkt von 12 und 45 sei P, der

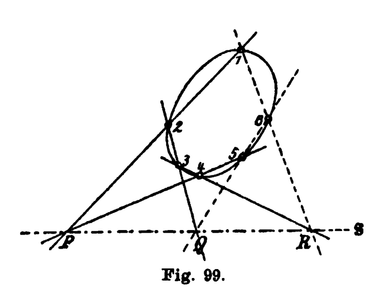


Fig. 99.

Zu fünf Berührenden eines Kegelschnitts ist eine sechste zu finden.

Die fünf gegebenen Berührenden seien I II III IV V, und die gesuchte Berührende schneide die Berührende V in dem beliebigen Punkt Q_1. Die Verbindungsgerade p der Schnittpunkte I II und IV V und die Verbindungsgerade von II III mit Q_1 schneiden einander in einem Punkt S; dann mufs nach Brianchon die sechste Berührende mit der ersten in dem

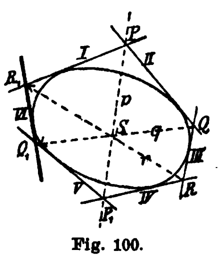


Fig. 100.

von *2 3* und dem Strahl durch *5* sei Q, und PQ (oder s) werde von *34* in R getroffen; dann mufs nach Pascal der sechste Punkt auch auf *1R* liegen, also der Schnittpunkt von *1R* und *Q5* sein.

Indem man die Gerade s sich um P drehen läfst, gleiten die Schnittpunkte Q und R auf *23* und *34* hin, und man erhält durch die Verbindungsgeraden dieser Punkte mit *5* und *1* beliebig viele Punkte des Kegelschnitts.

2. Rücken zwei auf einander folgende Punkte des Sehnensechsecks einander unbeschränkt nahe, so wird die betr. Seite eine Berührende, wobei nun der Pascal'sche Satz auch für diese Gerade gilt.

Punkt R_1 zusammentreffen, wo die Verbindungsgerade r von S und *III IV* die Berührende *I* schneidet.

Indem man den Punkt S auf p hingleiten läfst, drehen sich q und r um Q und R, und man erhält durch den Schnittpunkt dieser Geraden mit *V* und *I* beliebig viele Berührende des Kegelschnitts.

2'. Rücken die Berührungspunkte zweier auf einander folgenden Berührenden einander unbeschränkt nahe, so wird ihr Schnittpunkt selbst Berührungspunkt, ohne dafs der Satz von Brianchon seine Geltung verliert.

Hiernach lassen sich nun die Aufgaben lösen:

a) *In einem von fünf gegebenen Punkten eines Kegelschnitts ist die Berührende zu zeichnen.*

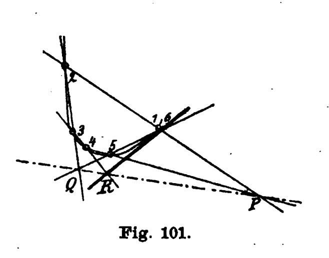


Fig. 101.

Wir numerieren die fünf Punkte so, dafs der Punkt, in dem die Berührende gezogen werden soll, die Nummer *1* und *6* erhält, zeichnen die Pascalsche Gerade PQ, auf welcher durch *34* ein Punkt R der Berührenden erhalten wird.

a') *Auf einer von fünf gegebenen Berührenden eines Kegelschnitts ist der Berührungspunkt zu bestimmen.*

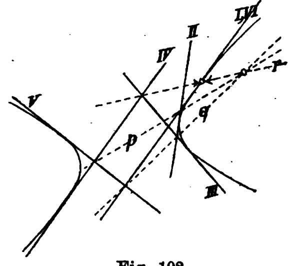


Fig. 102.

Wir numerieren die fünf Berührenden so, dafs die Gerade, deren Berührungspunkt gefunden werden soll, die Nummer *I* und *VI* erhält, bestimmen den Brianchonschen Punkt pq, durch den mit *III IV* die Gerade r nach dem Berührungspunkt erhalten wird.

Ebenso können die folgenden Aufgaben gelöst werden, indem bei gröfserer Zahl der gegebenen Punkte der Satz von Pascal, bei gröfserer

Zahl der gegebenen Berührenden der von Brianchon angewendet wird. Man giebt im ersteren Fall dem Berührungspunkt einer gegebenen oder gesuchten Berührenden zwei auf einander folgende Nummern des Sechsecks, ebenso im letzteren Fall der Berührenden, deren Berührungspunkt gegeben oder gesucht ist.

Es sind weitere Punkte oder Berührende zu bestimmen, wenn von einem Kegelschnitt gegeben sind:

b) *vier Punkte und die Berührende in einem derselben;*	b′) *vier Berührende und der Berührungspunkt auf einer derselben.*
c) *drei Punkte und die Berührende in zweien derselben.*	c′) *drei Berührende und der Berührungspunkt auf zweien derselben.*

3. Durch fünf Punkte *12345* eines Kegelschnittes läfst sich aufser diesem kein weiterer Kegelschnitt legen. Gäbe es nämlich noch einen zweiten, so müfste ein beliebiger Strahl durch *5* (Fig. 99) die beiden Kegelschnitte in zwei Punkten x und y schneiden, der Art, dafs sowohl *12345x*, als *12345y* ein Pascalsches Sechseck wäre. Nun ist aber durch die Schnittpunkte von *12* und *45*, *23* und *5xy* die Pascalsche Gerade PQ bestimmt und durch deren Schnitt R mit *34* auch die Gerade *R1*, auf welcher der sechste Punkt liegen mufs. Daher ist dieser Punkt durch den Schnittpunkt des Strahles durch *5* mit *R1* eindeutig bestimmt. Jeder Strahl durch *5* trifft nur je einen Punkt eines einzigen Kegelschnittes.

In ähnlicher Weise lassen sich die übrigen folgenden Sätze ableiten.

Ein Kegelschnitt ist eindeutig bestimmt, wenn von ihm gegeben sind:

a) *fünf Punkte;*	a′) *fünf Berührende;*
b) *vier Punkte und die Berührende in einem derselben;*	b′) *vier Berührende und der Berührungspunkt auf einer derselben;*
c) *drei Punkte und die Berührenden in zweien derselben.*	c′) *drei Berührende und die Berührungspunkte auf zweien derselben*).*

4. *Es ist stets möglich, einen Kegelschnitt zu zeichnen zu folgenden, beliebig angenommenen fünf Bestimmungsstücken (Punkten oder Berührenden) desselben:*

a) *zu drei Punkten und je einer Geraden durch zwei derselben,*	a′) *zu drei Geraden und je einem Punkt auf zweien derselben,*
b) *zu vier Punkten und einer Geraden durch einen derselben,*	b′) *zu vier Geraden und einem Punkt auf einer derselben,*
c) *zu fünf Punkten,*	c′) *zu fünf Geraden,*

unter der Bedingung, dafs nicht

---

*) Von hier kann sofort zu § 39 (ausschliefslich § 39, 7) übergegangen werden.

1) *drei Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen,*	1') *drei Berührende durch einen gemeinsamen Punkt gehen oder parallel sind,*
2) *zwei Punkte auf einer Berührenden liegen.*	2') *zwei Berührende durch einen Berührungspunkt gehen.*

Sind zunächst a) zwei Gerade SA und SB, ihre Berührungspunkte A und B und ein weiterer Punkt C gegeben, so zeichnet man in den Winkel der Geraden, in dem der Punkt C liegt, einen (in A_1 und B_1) berührenden Kreis und zieht den Strahl SC, der den Kreis in C_1 trifft. Dann liegt $\Delta\, ABC$ bestrahlt von $A_1 B_1 C_1$ (S. 75, 4), wobei SA als Bild von SA_1 gilt und SB als Bild von SB_1 (S. 79, 4). Das Bild des Kreises ist der Kegelschnitt, der die verlangten Bedingungen erfüllt.

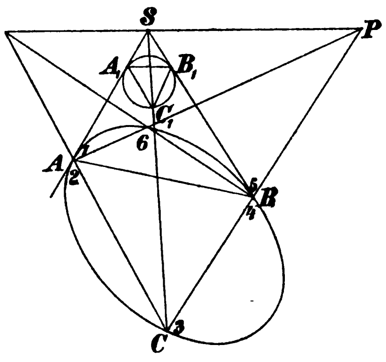


Fig. 108.

Sind dagegen b) vier Punkte und eine Gerade gegeben, so numeriert man den Berührungspunkt mit $\overline{12}$, die andern Punkte mit 3, $\overline{45}$ und 6 und zeichnet nach Pascal die Gerade $\overline{45}$. Zu den Berührenden 12 und 45 und dem Punkt 3 als Bestimmungsstücke giebt es dann nach a) einen Kegelschnitt. Den Schnittpunkt dieses Kegelschnittes mit der Geraden 56 findet man durch das schon gezeichnete Pascalsche Sechseck, d. h. dieser Schnittpunkt ist 6.

Sind c) fünf Punkte gegeben, so numeriert man sie mit $\overline{12}$, 3, 4, 5, 6 und zeichnet nach Pascal die Berührende 12. Dann ist nach b) ein Kegelschnitt möglich, dem $\overline{12}$, 3, 4, 5 angehören und dann auch, wie eben angegeben, der Punkt 6.

Ebenso werden die übrigen Sätze a', b', c' bewiesen (vgl. II § 25, 4').

§ 38. Bedingungen der bestrahlten Lage zweier Kegelschnitte.

1. In § 37, 3 wurde die Zahl der Punkte und Berührenden angegeben, durch welche ein Kegelschnitt eindeutig bestimmt ist. Wenn in solcher Zahl die Stücke zweier Kegelschnitte paarweise bestrahlt liegen, so gilt dies für die Kegelschnitte selbst. Denn bildet man den einen Kegelschnitt mit seinen fünf gegebenen Stücken in die zweite Figur hinein ab, so erhält man als Bild einen Kegelschnitt, welchem die Bilder der Stücke angehören. Dieses Bild des ersten Kegelschnittes mufs aber den zweiten Kegelschnitt decken, da durch die fünf bestrahlten Stücke nur ein Kegelschnitt möglich ist.

Zwei Kegelschnitte liegen gegenseitig bestrahlt, wenn dies paarweise für folgende Stücke gilt:

a) *fünf Punkte,*
b) *vier Punkte und die Berührende in einem derselben,*
c) *drei Punkte und die Berührende in zweien derselben.*

a') *fünf Berührende,*
b') *vier Berührende und den Berührungspunkt auf einer derselben,*
c') *drei Berührende und die Berührungspunkte auf zweien derselben*).*

2. Wie ein Kreis der Art als Kreis abgebildet werden kann, dafs ein beliebiger Punkt innerhalb der Kreisfläche zum Mittelpunkt wird (§ 33, 2), so ist dies auch für jeden Kegelschnitt der Fall.

Ist P ein Punkt im Innern des Kegelschnitts, AB dessen Durchmesser, CD dessen zugeordnete Sehne, und sind R und L die äufseren Nebenecken des Sehnenvierecks $ACBD$, so errichtet man in deren Mitte M die Senkrechte $SM = MR$ und nimmt S als Strahlpunkt. Auf einem Strahl SA kann dann ein Punkt A_1 als Bild von A angenommen und durch ihn die Bildebene parallel zur Ebene SRL gelegt werden.

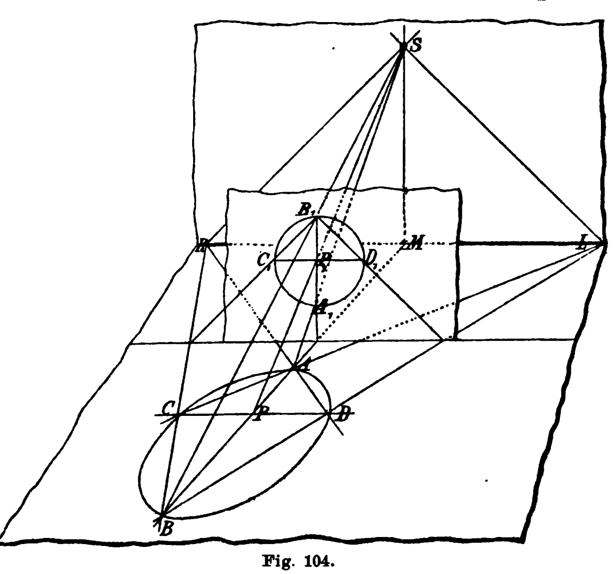


Fig. 104.

Dann wird CD, da es parallel zur Fluchtgeraden RL und der Axe ist, auch als Parallele C_1D_1 abgebildet (S. 75, 2 c), $A_1B_1 \parallel SM$, somit $\perp C_1D_1$, $B_1C_1 \parallel SR$, da R Fluchtpunkt auf BC ist, kurz es ist $\triangle P_1B_1C_1 \backsim MSR$, d. h. ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck; $A_1C_1B_1D_1$ ist ein Quadrat, um das man einen Kreis beschreiben kann, in dem die Berührende in A_1 parallel C_1D_1, also parallel der Axe und der Berührenden in A ist. Somit liegen die vier Ecken des Quadrats und diese Berührende des Kreises bestrahlt von den entsprechenden fünf Stücken des Kegelschnittes. Der Kreis ist also das Bild des Kegelschnittes, der Mittel-

*) Statt des folgenden § 38, 2 bis § 42 kann zur Abwechselung im Unterricht auch Teil II § 25, 8—14 genommen werden.

punkt P_1 das Bild von P, während die Polare RL von P im Bild in unendliche Entfernung hinausgerückt ist.

Wir haben hierbei P beliebig im Innern des Kegelschnitts angenommen. Wir hätten ebensowohl von der aufserhalb liegenden Geraden RL ausgehen, hierauf ihren Pol P und in der angegebenen Weise die Punkte R und L bestimmen können.

Es folgt hieraus der Satz von Poncelet (1813):

Ein Kegelschnitt kann stets als Kreis abgebildet werden, während zugleich eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) *Ein beliebiger Punkt im Innern des Kegelschnittes wird als Kreismittelpunkt abgebildet und seine Polare als unendlich ferne Gerade. Der Durchmesser des Punktes und seine zugeordnete Sehne werden als zwei zu einander senkrechte Durchmesser abgebildet.*

b) *Eine beliebige Gerade aufserhalb des Kegelschnittes wird als unendlich ferne Gerade abgebildet und ihr Pol als Kreismittelpunkt. Der der Geraden zugeordnete Durchmesser und die ihr parallele Sehne des Poles werden als zwei zu einander senkrechte Durchmesser abgebildet.*

Die Bedingungen für diese Abbildung sind:

In dem Viereck, das durch den Durchmesser des Punktes und seine zugeordnete Sehne bestimmt ist, zeichnet man zu den beiden äufseren Nebenecken eine Mittelsenkrechte und nimmt auf ihr den Strahlpunkt in einem Abstand an, der gleich der Hälfte der Strecke zwischen den Nebenecken ist. Die Bildebene wird parallel zur Strahlenebene durch diese Nebenecken gelegt.

3. Zum Nachweis, dafs fünf Paare gegebener Punkte oder Berührenden zweier Kegelschnitte in einer einzigen Ebene gegenseitig bestrahlt liegen, ist sowohl die Lage der entsprechenden Punkte auf Strahlen des Strahlpunktes, als die Lage der Schnittpunkte entsprechender Geraden auf der Axe nachzuweisen (S. 79, 3).

a) *Zwei Kegelschnitte einer Ebene liegen gegenseitig bestrahlt von dem Schnittpunkt zweier gemeinsamen Berührenden, wenn beide Kegelschnitte innerhalb eines Winkels dieser Geraden liegen oder innerhalb eines Winkels und des Scheitelwinkels.*

Denn die beiden Berührenden entsprechen einander selbst als Strahlen des Strahlpunktes (S. 79, 4), und die Dreiecke aus den beiden Paaren von Berührungspunkten und einem Paar der Schnittpunkte eines beliebigen weiteren Strahles liegen gegenseitig bestrahlt (S. 75, 4), also im ganzen fünf Stücke.

Insbesondere folgt hieraus:

b) *Zwei Kegelschnitte einer Ebene mit gemeinsamer Berührungssehne liegen gegenseitig bestrahlt zum Schnittpunkt der gemeinsamen Berührenden als Strahlpunkt und zu der Geraden durch die Berührungspunkte als Axe.*

Zusatz. Wenn in einer Ebene zwei Kegelschnitte so liegen, dafs

zu einem und demselben Punkt im Innern der beiden Kegelschnitte die beiden nach 2 bestimmten Vierecke zwei gemeinsame äufsere Nebenecken haben, so können diese Kegelschnitte als Bilder zweier Kreise mit einem Mittelpunkt aufgefafst werden der Art, dafs der genannte Punkt als Kreismittelpunkt abgebildet wird und seine Polare Fluchtgerade für die unendlich fernen Punkte der Ebene beider Kreise ist. Wie beide Kreise gegenseitig bestrahlt sind in Bezug auf ihren Mittelpunkt als Strahlpunkt, so gilt dies auch für beide Kegelschnitte in Bezug auf jenen Punkt als Strahlpunkt und seine Polare als Axe. (Vgl. Fig. 106 a und b.)

§ 39. Axen, Brennpunkte und Leitgeraden.

1. Um den Übergang zu vermitteln von solchen Eigenschaften der Punkte und Geraden in Kegelschnitten, die sich bei der Abbildung unmittelbar von der Vorlage auf das Bild übertragen lassen, zu solchen

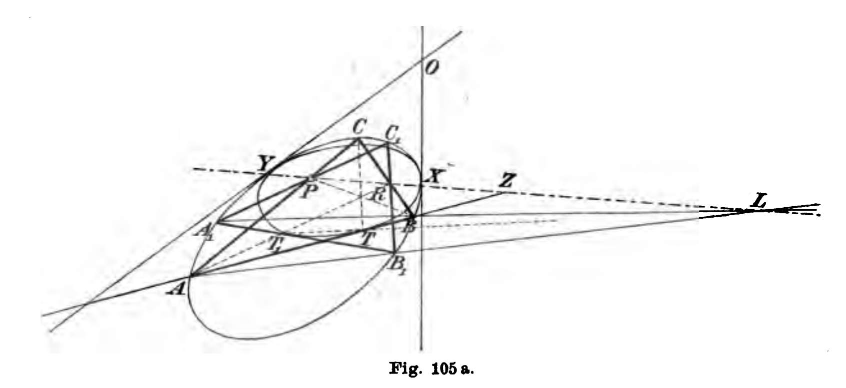


Fig. 105 a.

Eigenschaften, für welche dies nicht der Fall ist, benutzen wir zwei Kegelschnitte einer Ebene mit gemeinsamer Berührungssehne XY.

Es seien AB und A_1B_1 Sehnen des einen und Berührende des andern Kegelschnittes. Wir bilden die Figur so ab, dafs die Berührungssehne XY Fluchtgerade wird; dann sind die Bilder der Kegelschnitte Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten OX_∞ und OY_∞. Der Schnittpunkt S der beiden Berührenden AB und A_1B_1 liegt auf dem der Berührungssehne TT_1 zugeordneten Durchmesser OS (S. 95, 4 a), der die Sehne TT_1 halbiert, der also

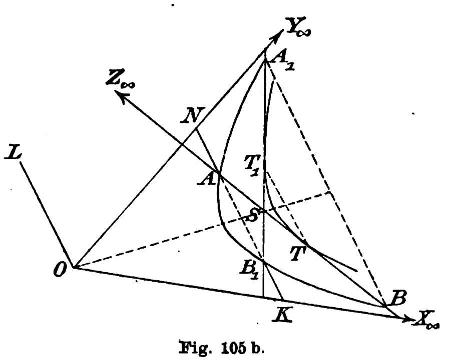


Fig. 105 b.

auch durch die Mitten von allen zu TT_1 parallelen Strecken geht, die von AB und A_1B_1 begrenzt sind. Der Durchmesser OS halbiert aber auch die von den Asymptoten begrenzten Strecken solcher Parallelen, da im Winkel O der Asymptoten der zu TT_1 parallele Strahl harmonisch zugeordnet zu OS ist (S. 96, 6 b). Daher sind auch auf der durch A zu TT_1 parallel gezogenen Geraden die Strecken zwischen den Asymptoten und den Geraden AS und B_1S einander gleich. Daraus folgt (nach S. 96, 6 c), dafs diese Parallele die Gerade SB_1 in einem Punkt der durch A gehenden Hyperbel schneidet, d. h. eben im Punkt B_1; es ist also $AB_1 \parallel TT_1$. Ebenso folgt $A_1B \parallel TT_1 \parallel AB_1$. In der Vorlage schneiden somit AB_1 und A_1B einander in einem Punkt L der Geraden XY.

Verbindet man nun weiter A und A_1 mit einem Punkt P von XY und vervollständigt die Sehnendreiecke ACB und $A_1C_1B_1$, so bildet $B_1ACBA_1C_1$ ein Pascalsches Sechseck mit L und P als Schnittpunkten der Gegenseiten B_1A und BA_1, AC und A_1C_1. Daher mufs auch der Schnittpunkt von CB und C_1B_1 auf PL oder XY liegen.

a) *Wenn in einem Kegelschnitt ein Dreieck so bewegt wird, dafs seine Ecken stets auf dem Kegelschnitt bleiben, eine Seite desselben stets einen zweiten Kegelschnitt berührt, der mit ersterem eine Berührungssehne gemeinsam hat, während eine zweite Seite des Dreiecks stets durch einen bestimmten Punkt dieser Geraden geht, so dreht sich auch die dritte Seite um einen bestimmten Punkt der Geraden.*

b) *Die berührende Seitenstrecke des Dreiecks wird durch den Berührungspunkt und den Schnittpunkt der Geraden harmonisch geteilt.*

Das letztere folgt daraus, dafs im Bild auch $AT = TB$ ist (S. 96, 6 c), während der Schnittpunkt von AB mit XY in unendliche Entfernung fällt.

Man erhält daher T, indem man AR und PB zieht und deren Schnittpunkt mit C verbindet; diese Verbindungsgerade trifft AB in T.

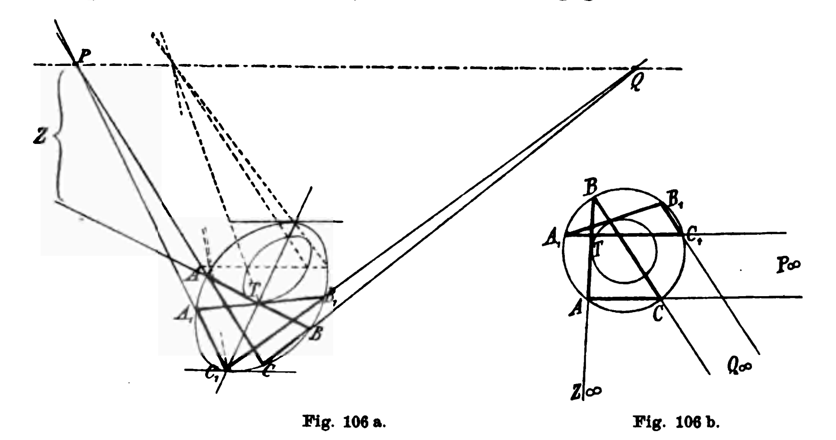


Fig. 106 a. Fig. 106 b.

Zusatz. Der Satz gilt auch für zwei Kegelschnitte von der im Zusatz zu § 38, 3 angegebenen Lage (Fig. 106 a), wobei an Stelle der Berührungssehne die Verbindungsgerade der äufseren Nebenecken tritt. Der Beweis ergiebt sich leicht aus der Abbildung (Fig. 106 b).

2. Axen. Beschreiben wir um den Mittelpunkt M einer Ellipse oder Hyperbel einen Kreis, der jene in zwei Punkten A und B schneidet, so mufs derselbe auch durch die gegengesetzten Punkte A_1 und B_1 gehen. Die Durchmesser $SS_1 \parallel BA_1$ und $VV_1 \parallel AB$ halbieren die Sehnen AB und BA_1, sind also einander zugeordnet, wobei $AB \perp BA_1$.

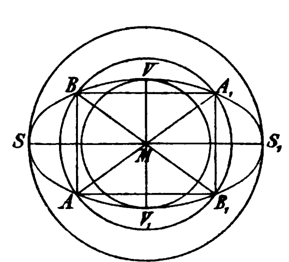


Fig. 107.

a) *In der Ellipse und Hyperbel giebt es zwei zu einander senkrechte zugeordnete Richtungen.*

Die Durchmesser dieser Richtungen heifsen Axen des Kegelschnittes.

b) *In der Hyperbel halbieren die Axen die Winkel der Asymptoten,* da die zugeordneten Durchmesser und die Asymptoten vier harmonische Strahlen bilden (S. 96, 6 b und S. 83, 5 b). Von beiden Axen trifft jedoch nur eine die Hyperbel; sie heifst reelle Axe.

Beschreibt man um eine (reelle) Axe als Durchmesser einen Kreis, so hat derselbe mit dem Kegelschnitt in den Grenzpunkten der Axe auch die Berührenden gemeinsam; dieser Kreis kann also den Kegelschnitt in keinem weiteren Punkt treffen, da er andernfalls mit ihm ganz zusammenfallen müfste (S. 99, 2 c). Der Kreis schliefst somit den Kegelschnitt entweder ganz ein oder ganz aus; jeder andere Durchmesser mufs daher im ersten Fall kleiner, im zweiten gröfser als die betreffende Axe sein. Bei der Ellipse unterscheiden wir hiernach die kleine und grofse Axe, als kleinsten und gröfsten Durchmesser; bei der Hyperbel ist die reelle Axe der kleinste Durchmesser.

Zugleich folgt hieraus, dafs ein Kegelschnitt, mit Ausnahme des Kreises, nur ein Paar zueinander senkrechter zugeordneter Durchmesser haben kann.

Ziehen wir in einer Parabel eine Sehne s senkrecht zu einem Durchmesser a_1, so heifst der ihr zugeordnete Durchmesser a die Axe der Parabel. Da in der Parabel alle Durchmesser parallel sind, so hat sie auch nur eine Axe.

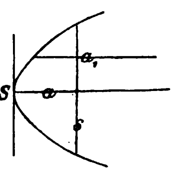


Fig. 108.

Die Grenzpunkte der grofsen Axe einer Ellipse, die der reellen Axe einer Hyperbel und den Grenzpunkt der Axe einer Parabel nennt man die Scheitel dieser Kegelschnitte.

3. Brennpunkte der Ellipse und Hyperbel. Ein um die grofse Axe der Ellipse (Fig. 109 a) oder die reelle Axe einer Hyperbel

(Fig. 109 b) als Durchmesser beschriebener Kreis hat mit dieser eine Berührungssehne gemeinsam. Bewegt man daher ein Sehnendreieck ABC dieses Kreises so, dafs eine Seite AB den Kegelschnitt berührt, eine zweite AC durch den Mittelpunkt O des Kegelschnittes geht, so geht auch die andere BC stets durch einen bestimmten Punkt F der Axe (1).

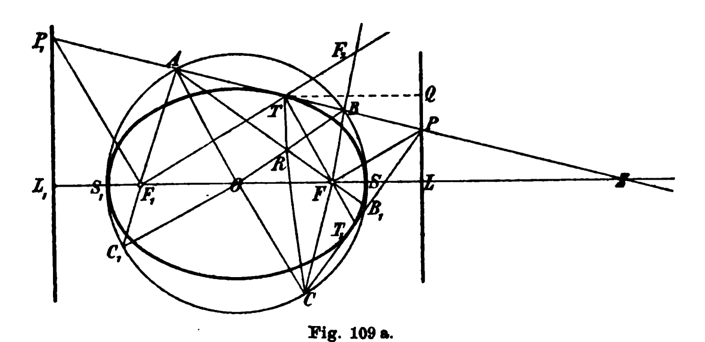


Fig. 109 a.

Dieser Punkt heifst Brennpunkt des Kegelschnittes. Läfst man die Seite BC_1 durch den Mittelpunkt gehen, so ergiebt AC_1 einen zweiten Brennpunkt F_1. Da $AC_1 \parallel BC$, als Senkrechte zu AB, und da $AO = OC$, so ist auch $F_1O = OF$.

Es ist nun $\sphericalangle ABC = R = BAC_1$; daher gilt für die Brennpunkte der Satz:

a) *Die Brennpunkte der Ellipse oder Hyperbel sind zwei Punkte der Axe (in gleichem Abstand vom Mittelpunkt) von der Eigenschaft, dafs die Fufspunkte ihrer auf die Berührenden gefällten Senkrechten auf einem Kreis liegen, und zwar auf dem Kreis, der um den Scheitelabstand als Durchmesser gelegt wird.*

Hiernach lassen sich *Ellipse und Hyperbel bei gegebenen Brennpunkten und Scheiteln als Gebilde von Berührenden zeichnen.*

Der Abstand c der Brennpunkte vom Mittelpunkt heifst die lineare Excentrizität.

Da $AF_1 = FC$, so ist $AF_1 \cdot BF = BF \cdot FC = SF \cdot FS_1 = (a + c)(a - c)$, wenn die Axe $SS_1 = 2a$ ist. Es gilt somit:

b) *Das Produkt der Abstände beider Brennpunkte von einer Berührenden hat für alle Berührende den gleichen Wert.*

In der Ellipse ist die Berührende an einem Grenzpunkt der kleinen Axe $2b$ (Fig. 110 a) parallel zur grofsen Axe $2a$; daher ist für diese Berührende ihr Abstand von jedem Brennpunkt $= b$, also $b^2 = a^2 - c^2$. *Wenn a und b gegeben sind,* so läfst sich durch ein rechtwinkliges Dreieck $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ und damit *die Lage der Brennpunkte bestimmen.* In der Hyperbel (Fig. 110 b) bestimmt die Berührende vom Brennpunkt F an den Kreis um $2a$ durch ihren Berührungspunkt die-

jenige Hyperbelberührende, die durch den Mittelpunkt geht, d. h. die Asymptote, da in diesem Fall die Punkte B und C des Dreiecks ABC (Fig. 109 b, S. 108) in einen Punkt P (Fig. 110 b) zusammenfallen.

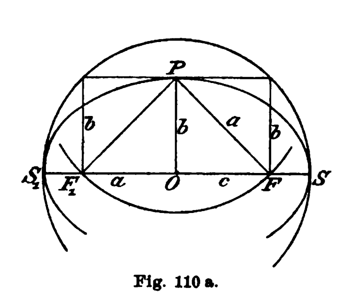


Fig. 110 a.

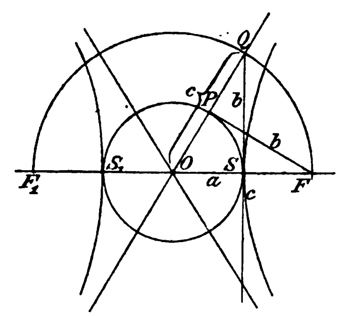


Fig. 110 b.

Die Kreisberührende b ist bestimmt durch $b^2 = c^2 - a^2$ und stimmt mit der von der Asymptote begrenzten Scheitelberührenden überein ($\triangle\ OPF \cong OSQ$). Ein rechtwinkeliges Dreieck OQS *bestimmt* somit, *wenn die Axe* $2a$ *und die Asymptoten gegeben, die Brennpunkte* — oder, *wenn* c *und* a *gegeben, die Lage der Asymptoten.*

4. Fahrstrahlen der Ellipse und Hyperbel. Den Berührungspunkt T auf AB (Fig. 109 a, b, S. 108) findet man nach 1 b, indem man AF und OB zieht und deren Schnittpunkt R mit C verbindet; CR trifft AB in dem Berührungspunkt T. Von dem Vierseit $BTRF$ ist AC eine Nebenseite, welche durch die Nebenseite BR in O halbiert wird; daher mufs die dritte Nebenseite $TF \parallel AC$ sein. In gleicher Weise kann der Berührungspunkt T aus dem Dreieck ABC_1 mit den Punkten F_1 und O erhalten werden, woraus dann folgt, dafs $TF_1 \parallel BC_1$.

Die Verbindungsstrecken eines Kegelschnittpunktes mit den Brennpunkten nennt man die Fahrstrahlen des Punktes. Daher gilt der Satz:

a) *Die Fahrstrahlen eines Punktes sind parallel mit den Strahlen, die vom Mittelpunkt nach den Fufspunkten derjenigen Senkrechten gezogen werden, die man aus den Brennpunkten auf die Berührende jenes Punktes gefällt hat.*

Nun ist $\sphericalangle\, FTB = OAB$ und $\sphericalangle\, F_1TA = OBA$, und da $\sphericalangle\, OAB = OBA$, so ist auch $\sphericalangle\, FTB = ATF_1$.

b) *Die Fahrstrahlen eines Punktes auf einem Kegelschnitt bilden mit dessen Berührender gleiche Winkel.*

Hiernach ist die Aufgabe zu lösen: *zu einem Punkt die Berührende zu zeichnen, wenn die Brennpunkte gegeben sind.* (Vgl. S. 28, 9.)

Schneiden einander FB und F_1T in F_2, so ist somit $F_2 \wedge F$

in Bezug auf AB als Mittellinie und $TF_2 = TF$; ferner ist nach obigem $F_2F_1C_1B$ ein Parallelogramm, in welchem $F_1F_2 = BC_1$, d. i. gleich der Axe des Kegelschnittes ist. In der Ellipse ist F_1T und TF_2 gleichgerichtet, in der Hyperbel sind beide Strecken gegengerichtet. Da nun $F_1T + TF_2 = F_1F_2 = BC_1$, so folgt für erstere $F_1T + TF = BC_1$, für letztere $F_1T - TF = BC_1$.

c) *In der Ellipse ist die Summe der Fahrstrahlen, in der Hyperbel deren Unterschied für jeden Punkt unveränderlich, nämlich gleich der grofsen Axe in der Ellipse, gleich der reellen Axe in der Hyperbel.*

Hiernach ist die Aufgabe zu lösen, *Punkte des Kegelschnittes zu bestimmen, von dem die beiden Brennpunkte und die Scheitel gegeben sind* (vgl. S. 27, 10).

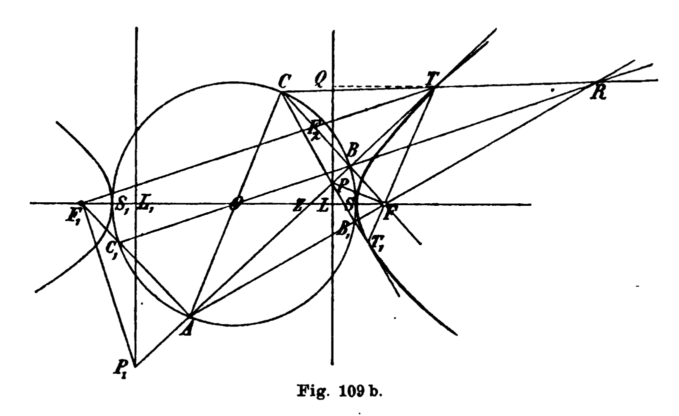


Fig. 109 b.

Im Sehnendreieck CAB_1 (Fig. 109 a und b), von dem die Seite CA durch den Mittelpunkt, die Seite AB_1 durch den Brennpunkt F geht, ist CB_1 Berührende und der Fahrstrahl $FT_1 \parallel AC$, somit TFT_1 eine Gerade. Die beiden Berührenden zu TT_1 schneiden einander im Punkt P, dem Pol zu TT_1. Da dann im $\triangle APC$ die Höhen BC und AB_1 einander in F schneiden, so mufs $PF \perp AC$ oder $PF \perp TT_1$ sein, d. h.:

d) *Der Pol eines Fahrstrahls liegt auf der in seinem Brennpunkt errichteten Senkrechten.*

5. Brennpunkt und Leitgerade der Parabel. Hält man einen Brennpunkt F der Ellipse und den benachbarten Scheitel S an der Stelle fest und läfst den andern Scheitel S_1 in der Richtung SF in unendliche Entfernung hinausrücken, so wächst der Ellipsendurchmesser und auch der Halbmesser des um SS_1 beschriebenen Kreises, und die Punkte des Kreisbogens bei S nähern sich der berührenden Geraden in S, die senkrecht FS ist. Sind aber S und F der eine Scheitel und Brennpunkt einer Hyperbel, und rückt der andere Scheitel andererseits der in S Berührenden in Richtung FS unendlich weit

hinaus, so nähern sich bei S die Punkte des um die Axe beschriebenen Kreises von der andern Seite her der Berührenden in S, während die reelle Axe der Hyperbel sich vergröfsert. Als Grenzfigur zwischen diesen Ellipsen und Hyperbeln mit dem gemeinsamen Brennpunkt F und Scheitel S und mit den in entgegengesetzten Richtungen wachsenden Scheitelstrecken erhält man den Kegelschnitt, dessen zweiter Scheitel in unendliche Entfernung hinausgerückt ist, d. h. die Parabel, und zugleich als Grenzform des Kreises bei S die im Scheitel berührende Gerade. Während dieser Veränderung der Lage von S_1 ändert sich die Eigenschaft nicht, dafs der Fufspunkt der Senkrechten vom Brennpunkt auf die Berührende in der eben genannten Linie liegt. Daraus ergiebt sich:

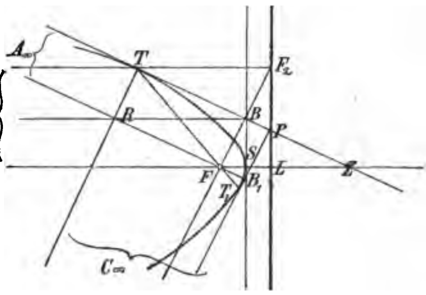


Fig. 109 c

a) *Brennpunkt einer Parabel ist der Punkt der Axe, von dessen Senkrechten zu den Berührenden die Fufspunkte in der Berührenden des Scheitels liegen.*

Hiernach läfst sich *die Parabel als Gebilde von Berührenden zeichnen, wenn ihr Brennpunkt und Scheitel gegeben sind.*

Das Viereck $FBTR$ für die Bestimmung des Berührungspunktes wird hierbei ein Rechteck, wobei $\sphericalangle FTB = RBT = BTF_2$ ist, d. h.:

b) *Bei der Parabel bilden der Fahrstrahl und der Durchmesser eines Punktes mit seiner Berührenden gleiche Winkel.*

Hiernach ist die Aufgabe zu lösen: *Zu einem Parabelpunkt die Berührende zu zeichnen, wenn der Brennpunkt und die Axenrichtung gegeben sind.*

Ist S der Scheitel der Parabel, $F_2 \wedge F$ zur Berührenden TB als Mittellinie, und ist $F_2L \perp FS$, so ist $FS = SL$, da $FB = BF_2$. Es liegt also F_2 stets auf der *Senkrechten der Axe, deren Abstand vom Brennpunkt durch den Scheitel halbiert wird.* Diese Senkrechte ist die *Polare des Brennpunktes* (S. 83, 4b) und *heifst Leitgerade* der Parabel. Da $FT = TF_2$, so folgt:

c) *In der Parabel ist der Abstand eines Punktes vom Brennpunkt gleich dem von der Leitgeraden.*

Hiernach lassen sich *Punkte der Parabel bestimmen, wenn der Brennpunkt und die Leitgerade gegeben sind.*

Zusatz. Aus b) folgt noch, dafs $FT = FZ$ ist, was ebenfalls zur Bestimmung der Berührenden in T benutzt werden kann.

6. Leitgeraden der Ellipse und Hyperbel. Auch in der Ellipse und Hyperbel *nennt man die Polare eines Brennpunktes die Leitgerade zu demselben.* Wir erhalten nach 4d die Schnittpunkte der Berührenden AB mit den zwei Leitgeraden, indem wir auf den Fahrstrahlen des Berührungspunktes die Senkrechten ziehen (Fig. 109a und b), $FP \perp FT$, $F_1P_1 \perp F_1T$. Da dann $\triangle FTP \backsim F_1TP_1$ ist, so ist $FT : F_1T = PT : P_1T$ oder

$FT : (F_1T \mp TF) = PT : (P_1T \mp TP)$, oder, wenn $2a$ die grofse oder reelle Axe ist: $FT : 2a = PT : PP_1 = TQ : LL_1$, wenn TQ der Abstand von T bis zur Leitgeraden LP ist und LL_1 der Abstand der beiden Leitgeraden. Somit ist

$$FT : TQ = 2a : LL_1 = a : OL.$$

Dieses Verhältnis ist somit für alle Punkte des Kegelschnittes das gleiche, auch für den Scheitel S:

$$FS : SL = a : OL.$$

Ist die lineare Excentricität $OF = c$, so ist hiernach

$$(a - c) : (OL - a) = a : OL \text{ oder } (a - c) : a = (OL - a) : OL,$$

woraus: $c : a = a : OL$,

somit allgemein: $FT : TQ = c : a$.

Das Verhältnis $\frac{c}{a} = e$ heifst die Excentricität des Kegelschnittes.

In jedem Kegelschnitt ist das Verhältnis der Abstände eines Punktes von dem Brennpunkt und dessen Leitgeraden unveränderlich, nämlich gleich der Excentricität e des Kegelschnittes. In der Ellipse ist $e < 1$, *in der Parabel ist* $e = 1$, *in der Hyperbel ist* $e > 1$.

Hiernach kann man zusammenfassend erklären:

Ein Kegelschnitt ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen von einem Punkt und einer Geraden ein unveränderliches Verhältnis haben.

7. Brennpunkt als Strahlpunkt. Ist FT die zugeordnete Halbsehne im Brennpunkt, R eine äufsere Nebenecke des durch SS_1 und die Sehne in F bestimmten Sehnenvierecks, so ist $e = \frac{FT}{FL} = \frac{FS}{SL} = \frac{FT}{LR}$, woraus folgt: $LR = FL$.

Es liegt somit der Brennpunkt so, dafs er die auf S. 102, 2 gegebenen Bedingungen erfüllt für den Strahlpunkt der Abbildung des Kegelschnittes als Kreis, wenn die Bildebene $\parallel FLR$ ist. Hier fällt der Strahlpunkt, somit auch die Bildebene in die Ebene des Kegelschnittes hinein. Zugleich wird der Brennpunkt F als der Mittelpunkt des Kreises abgebildet, während ein Punkt des Kreises willkürlich ist.

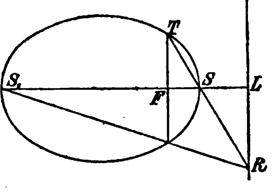


Fig. 111.

Jeder Kreis in der Ebene eines Kegelschnittes um einen Brennpunkt als Mittelpunkt liegt mit dem Kegelschnitt bestrahlt in Bezug auf den Brennpunkt als Strahlpunkt und die Leitgerade als (zum Kegelschnitt gehörige) Fluchtgerade.

Anwendungen dieses Satzes folgen in den Aufgaben.

Neuntes Kapitel.

Streckenverhältnisse in Abbildungen.

§ 40. Unveränderliche Produkte aus Strecken bei Abbildungen.

1.*) Wird eine Strecke AB von einem Punkt S bestrahlt und sind $SA = a$, $SB = b$ die Strahlstrecken und h der Abstand des Strahlpunktes von der Geraden AB, so kann die Strecke selbst in diesen von der Lage des Strahlpunktes abhängigen Gröfsen ausgedrückt werden. Es ist nämlich $2 \cdot \triangle ABS = \overline{AB} \cdot h = ab \sin(ab)$, somit $\overline{AB} = \frac{ab}{h} \sin(ab)$. Nehmen wir auf derselben Geraden eine an B angrenzende Strecke BC, so ergiebt sich für dieselbe auf gleiche Weise $BC = \frac{bc}{h} \sin(bc)$, und das Verhältnis beider Strecken ist

Fig. 112.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{a}{c} \frac{\sin(ab)}{\sin(bc)}.$$

Schliefst sich in C eine zweite Gerade an, auf welcher die Strecken CD und DE liegen, so folgt ebenso:

$$\frac{CD}{DE} = \frac{c}{e} \frac{\sin(cd)}{\sin(de)}.$$

Gehen wir in dieser Weise weiter auf eine dritte Gerade mit den Strecken EF und FG und eine vierte Gerade GA mit dem Teilpunkt H, so ergiebt sich schliefslich aus der Vervielfachung der entsprechenden Verhältnisse:

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FG} \cdot \frac{GH}{HA} = \frac{\sin(ab)}{\sin(bc)} \cdot \frac{\sin(cd)}{\sin(de)} \cdot \frac{\sin(ef)}{\sin(fg)} \cdot \frac{\sin(gh)}{\sin(ha)}.$$

Der Ausdruck rechts ist aber nur noch abhängig von den Winkeln der Strahlen und bleibt für alle Bilder der Figur von einem

---

*) Statt dieser Nummer kann auch II. Teil § 15, 1a, § 16, 5 u. 6 genommen werden.

bestimmten Strahlpunkt aus unverändert; es mufs also der Wert des Ausdrucks für ein Bild $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1 G_1 H_1$ der gleiche bleiben, d. h.:

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FG} \cdot \frac{GH}{HA} = \frac{A_1 B_1}{B_1 C_1} \cdot \frac{C_1 D_1}{D_1 E_1} \cdot \frac{E_1 F_1}{F_1 G_1} \cdot \frac{G_1 H_1}{H_1 A_1}.$$

Wird andrerseits der Strahlpunkt verlegt, so bleibt doch der links stehende Ausdruck unverändert, somit gilt für die neuen Strahlen:

$$\frac{\sin(ab)}{\sin(bc)} \cdot \frac{\sin(cd)}{\sin(de)} \cdot \frac{\sin(ef)}{\sin(fg)} \cdot \frac{\sin(gh)}{\sin(ha)} = \frac{\sin(a_1 b_1)}{\sin(b_1 c_1)} \cdot \frac{\sin(c_1 d_1)}{\sin(d_1 e_1)} \cdot \frac{\sin(e_1 f_1)}{\sin(f_1 g_1)} \cdot \frac{\sin(g_1 h_1)}{\sin(h_1 a_1)}.$$

Daher mufs der Wert dieses Ausdrucks für alle Bilder der Figur und für alle Bilder der Bilder unverändert bleiben. Es ist dies eine metrisch-projektive Beziehung:

Wenn in einer geradlinigen Figur aus Strecken der Geraden ein Produkt von Verhältnissen der Art gebildet wird, dafs 1) jeder Punkt ebenso oft einen Dividenden als einen Divisor begrenzt und 2) von jeder Geraden ebenso oft ein Dividend als ein Divisor entnommen wird, so ist das Produkt unveränderlich für alle Bilder der Figur (und zwar gleich dem entsprechend gebildeten Ausdruck aus den Sinus der Winkel zwischen den Strahlen).

Gemäfs der ersten Bedingung fallen nämlich in den oben für die Strecken abgeleiteten Ausdrücken die Strahlstrecken nach den einzelnen Punkten aus der Rechnung und gemäfs der zweiten Bedingung auch die Abstände der Geraden vom Strahlpunkt.

2. Ein Ausdruck der eben angegebenen Art kann manchmal dadurch verändert und vereinfacht werden, dafs ein Grenzpunkt in unendliche Entfernung hinausrückt.

Wenn ein Punkt sich unmefsbar weit von zwei festen Punkten entfernt, so kommt das Verhältnis seiner Abstände von diesen Punkten dem Zahlwert 1 unbeschränkt nahe.

Denn tragen wir den Abstand DB (Fig. 113) auf DA ab, also $DC = DB$, so ist

$$\frac{DA}{DB} = \frac{DC + CA}{DB} = 1 + \frac{CA}{DB}$$

d. h. dies Verhältnis ist stets um so viel gröfser als 1, als der Quotient des Unterschiedes beider Strecken durch die kleinere Strecke beträgt. Letzterer Quotient kommt aber der Null unbeschränkt nahe, wenn der Punkt D in unendliche Entfernung hinausrückt, da dann der Nenner des Bruchs unendlich grofs wird, während der Zähler mehr und mehr gleich dem Abstand des Punktes A von der durch B zu AD gezogenen Senkrechten wird. Es ist also $\frac{AD_\infty}{BD_\infty} = 1$.

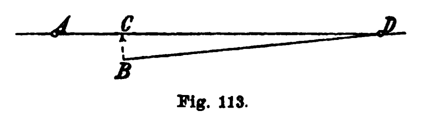


Fig. 113.

3. Wird eine Strecke AB durch zwei Punkte C und D irgendwo innen oder aufsen geteilt, so hat der Ausdruck $\frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA}$ oder $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ die in 1 verlangten Eigenschaften. Dieses Doppelverhältnis bleibt also unveränderlich für alle Abbildungen (vgl. II, § 20, 1 u. 2). Es folgt hieraus, dafs durch drei Punkte einer Geraden und drei beliebig als deren Bilder gewählte Punkte einer zweiten Geraden zu jedem vierten Punkt D das Bild D_1 bestimmt ist durch die beiden Gleichungen

$$\frac{A_1 D_1}{D_1 B_1} = \frac{A_1 C_1}{C_1 B_1} \cdot \frac{AD}{DB} : \frac{AC}{CB} \text{ und } A_1 D_1 + D_1 B_1 = A_1 B_1.$$

Für den Fall, dafs C und D die Strecke AB harmonisch teilen, wird der Wert des Ausdrucks am einfachsten aus dem Bild berechnet, in welchem $A_1 C_1 = C_1 B_1$ ist und D_1 in unendliche Entfernung fällt. Es ist

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{A_1 C_1}{C_1 B_1} : \left(\frac{A_1 D_{1\infty}}{D_{1\infty} B_1}\right) = -1.$$

Dies ergiebt sich auch folgendermafsen. Da der Strahl d parallel der Geraden g_1 ist, so ist $\sin(ad) = \sin(ag_1)$, $\sin(db) = \sin(bg_1)$, und es verhält sich

Fig. 114.

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(ag_1)} = \frac{A_1 C_1}{SC_1} = \frac{B_1 C_1}{SC_1} = \frac{\sin(cb)}{\sin(bg_1)},$$

also mit Berücksichtigung, dafs ad und db gegenwendig sind:

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)} = -1,$$

woraus für alle Bilder folgt:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1. \qquad \text{(Vgl. II. T. § 17, 2.)}$$

4. Werden die Seiten des Vielecks $ABCDE$ der Reihe nach von einer Geraden g in den Punkten $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ getroffen, so entspricht der Ausdruck

$$\frac{AA_1}{A_1 B} \cdot \frac{BB_1}{B_1 C} \cdot \frac{CC_1}{C_1 D} \cdot \frac{DD_1}{D_1 E} \cdot \frac{EE_1}{E_1 A}$$

den in 1 gestellten Bedingungen. Um seinen Wert zu bestimmen, nehmen wir den Strahlpunkt S auf der Geraden g an; es ist dann $\sin(aa_1) = \sin(ae_1)$, $\sin(a_1 b) = \sin(b_1 b)$ u. s. f., da die $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ auf g fallen. Es folgt somit, dafs der Ausdruck $= +1$ ist; dies ist eine Erweiterung des Satzes von Menelaos (II. T. § 15, 1b).

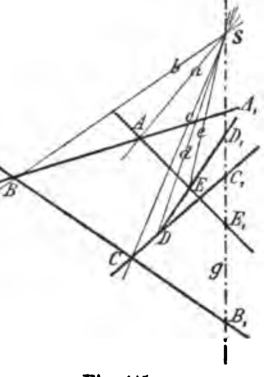


Fig. 115a.

Wenn man in einem Vieleck $ABCDE$ mit ungerader Seitenzahl von

einem Punkt S die Eckstrahlen zieht, welche die gegenüberliegenden Seiten je in einem Punkt schneiden, so ist der Ausdruck:

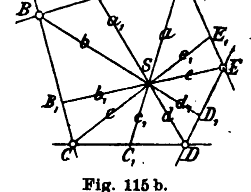


Fig. 115 b.

$$\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{DD_1}{D_1E} \cdot \frac{EE_1}{E_1A} = \pm 1.$$

Denn es ist $\sin(aa_1) = \sin(c_1d)$, $\sin(a_1b) = \sin(dd_1)$ u. s. w. Dies ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Ceva (II. T. § 15, 4).

§ 41. Gleichungen der Kegelschnitte.

1. Wird ein Kegelschnitt von den Seiten des Dreiecks ZOO_1 in den Punkten P, L, A, B, P_1, L_1 getroffen (Fig. 116), so ist

$$\frac{PO \cdot OL}{AO \cdot OB} \cdot \frac{AO_1 \cdot O_1B}{P_1O_1 \cdot O_1L_1} \cdot \frac{P_1Z \cdot ZL_1}{PZ \cdot PL} = 1.$$

Dafs nämlich diese Gleichung für ein Dreieck, dessen Seiten einen Kreis schneiden, giltig ist, folgt durch dreimalige Anwendung des Satzes von den Sehnenabschnitten im Kreis (II. § 10, 2, vgl. II. § 16, 7). Der Ausdruck entspricht aber auch den in § 40, 1 gestellten Bedingungen; sein Wert bleibt somit bei jeder Abbildung unverändert. Nehmen wir nun an, Z rücke in unendliche Entfernung hinaus, so wird der Ausdruck $\frac{P_1Z \cdot ZL_1}{PZ \cdot ZL}$ dem Werte 1 unbeschränkt nahe kommen (§ 40, 2), so dafs für die beiden andern Faktoren folgt:

Fig. 116.

$$\frac{PO \cdot OL}{P_1O_1 \cdot O_1L_1} = \frac{AO \cdot OB}{AO_1 \cdot O_1B}.$$

Nehmen wir noch AB als den zu $PL \parallel P_1L_1$ zugeordneten Durchmesser, so wird $OL = PO$, $O_1L_1 = P_1O_1$, und man erhält:

$$\frac{\overline{PO}^2}{\overline{P_1O_1}^2} = \frac{AO \cdot OB}{AO_1 \cdot O_1B}.$$

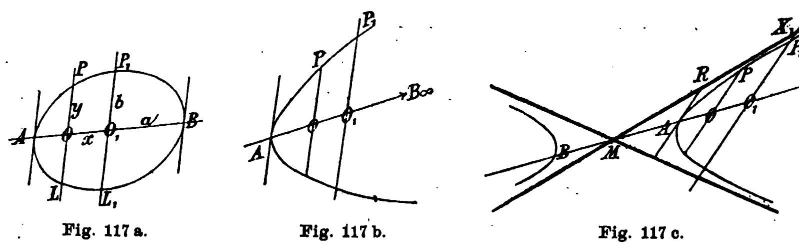


Fig. 117 a. Fig. 117 b. Fig. 117 c.

Für die Parabel (Fig. 117 b) insbesondere wird noch $\frac{OB_\infty}{O_1B_\infty} = 1$, so dafs nur $\frac{\overline{PO}^2}{\overline{P_1O_1}^2} = \frac{AO}{AO_1}$ übrig bleibt. Somit gilt der Satz:

In einer Ellipse oder Hyperbel verhalten sich die Quadrate zweier einem Durchmesser zugeordneten Halbsehnen wie die Produkte der zugehörigen Abschnitte des Durchmessers, in einer Parabel wie die zugehörigen Abschnitte des Durchmessers.

2. In der Parabel ist $\frac{\overline{PO}^2}{AO} = \frac{\overline{P_1 O_1}^2}{AO_1} = p$ eine unveränderliche Gröfse. Wird $PO = y$, $AO = x$ gesetzt, so ist:

$$y^2 = px \qquad \text{(Gleichung der Parabel).}$$

Wird x auf der Hauptaxe gemessen, so ist nach S. 109, 5 c für den Brennpunkt $y_1 = 2x_1$, also $y_1{}^2 = p \cdot \frac{y_1}{2}$, $y_1 = \frac{p}{2}$, d. h. *p ist die zugeordnete Sehne des Brennpunktes.*

Zusatz. Wird x auf dem durch den Punkt T (Fig. 109 c) gehenden Durchmesser gemessen, so ist für den Scheitel S die Halbsehne $= TZ$, der zugehörige Abschnitt des Durchmessers $= SZ$. Nun ist aber $TZ = 2BZ$, $\overline{TZ}^2 = 4\overline{BZ}^2 = 4ZF \cdot SZ$, oder da $FZ = TF = f$ (S. 109, 5 Zusatz), d. i. gleich dem Fahrstrahl vom Brennpunkt nach dem Anfangspunkt T des Durchmessers, $\overline{TZ}^2 = 4f \cdot SZ$. Die Parabelgleichung für den Durchmesser durch T ist also:

$$y^2 = 4fx.$$

3. Ist O_1 der Mittelpunkt einer Ellipse (Fig. 117 a) und sind $AO_1 = a$ und $P_1O_1 = b$ die Hälften der zugeordneten Durchmesser, so ist $\frac{PO^2}{b^2} = \frac{AO \cdot OB}{a^2}$. Setzen wir die Halbsehne $PO = y$ und den Abschnitt $O_1O = x$, so ist $AO = a - x$, $OB = a + x$; also:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{(a-x)(a+x)}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(Gleichung der Ellipse).}$$

Sind a und b die Halbaxen, c die lineare Excentricität, so ist für die *zugeordnete Sehne p des Brennpunktes* $x = c$, $y = \frac{p}{2}$, $\frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{4b^2} = 1$, woraus $p^2 = \frac{4b^2}{a^2}(a^2 - c^2) = \frac{4b^4}{a^2}$, (S. 106, 3), $p = \frac{2b^2}{a}$.

4. Wenn in einer Hyperbel (Fig. 117 c) der Punkt P_1 in unbeschränkt grofse Entfernung hinausrückt, so kommt er der Asymptote unbeschränkt nahe. Trifft die Halbsehne O_1P_1 die Asymptote in X_1, so nähert sich somit bei dem Weiterrücken der Halbsehne der Wert $\frac{O_1P_1}{O_1M}$ mehr und mehr dem Wert $\frac{O_1X_1}{O_1M} = \frac{AR}{AM}$, wenn AR der Abschnitt der Berührenden von A bis zur Asymptote ist. Nun ist:

$$\frac{PO^2}{AO \cdot OB} = \frac{P_1O_1{}^2}{AO_1 \cdot O_1B} = \left(\frac{P_1O_1}{O_1M}\right)^2 \cdot \frac{O_1M}{AO_1} \cdot \frac{O_1M}{O_1B}.$$

Rückt $P_1 O_1$ in unbeschränkt grofse Entfernung, so wird

$$\frac{P_1 O_1}{O_1 M} = \frac{X_1 O_1}{O_1 M} = \frac{AR}{MA}, \left(\frac{O_1 M}{AO_1}\right) \cdot \left(\frac{O_1 M}{O_1 B}\right) = 1 \text{ (S. 112, 2), somit ist:}$$

$$\frac{\overline{PO}^2}{AO \cdot BO} = \frac{\overline{AR}^2}{\overline{AM}^2}, \quad \frac{\overline{PO}^2}{\overline{AR}^2} = \frac{AO \cdot BO}{\overline{AM}^2}.$$

Wird $PO = y$, $MO = x$, $MA = a$, $AR = b$ gesetzt, so ist:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{(x-a)(x+a)}{a^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(Gleichung der Hyperbel).}$$

Die Strecke $2b$ heifst der ideelle zu $2a$ zugeordnete Durchmesser.

Ist a die halbe reelle Axe, c die lineare Excentricität, so folgt für die zugeordnete Sehne p des Brennpunktes: $\frac{c^2}{a^2} - \frac{p^2}{4b^2} = 1$, $p^2 = \frac{4b^2}{a^2}(c^2 - a^2) = \frac{4b^4}{a^2}$, (S. 107, 3), $p = \frac{2b^2}{a}$.

Ist hierbei $b = a$, so heifst die Hyperbel gleichseitig; ihre Asymptoten stehen senkrecht zu einander.

Zusatz. Zeichnen wir durch einen Punkt P der Hyperbel zu den Asymptoten parallele Gerade x und y, so folgt aus § 36, 6 d (S. 97), dafs $2x \cdot 2y$ eine unveränderliche Gröfse ist, da $2x$ und $2y$ die von der Berührenden gebildeten Abschnitte der Asymptoten sind. Die im Scheitel der Hyperbel gezogene Berührende bildet aber den Abschnitt $\sqrt{a^2 + b^2} = c$ (S. 107, 3b); somit ist

$$xy = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

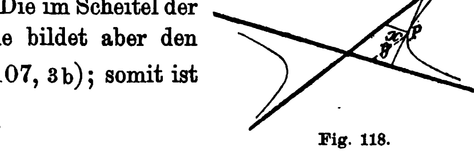


Fig. 118.

5. Bezeichnen wir nicht wie in 3 und 4 den Mittelpunktsabstand eines Punktes O der Axe, sondern den Abstand vom Scheitel A mit x, so folgt aus $\frac{PO^2}{b^2} = \frac{AO \cdot BO}{a^2}$ als Scheitelgleichung

für die Ellipse $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x(2a - x)}{a^2}$, $y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$, $y^2 = px - \left(\frac{bx}{a}\right)^2$,

für die Parabel $y^2 = px$,

für die Hyperbel $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x(2a + x)}{a^2}$, $y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2$, $y^2 = px + \left(\frac{bx}{a}\right)^2$.

Das Quadrat der Halbsehne ist daher in der Parabel (παραβάλλειν) geradezu gleichzusetzen dem Rechteck aus dem zugehörigen Scheitelabschnitt und aus der dem Brennpunkt zugeordneten Sehne (dem Parameter des Kegelschnittes); in der Ellipse (ἐλλείπειν) fehlt ihm noch etwas zu dieser Gröfse; in der Hyperbel (ὑπερβάλλειν) aber übertrifft sie diese Gröfse.

6. a) Wird ein Parabelabschnitt durch irgend welche Sehne AB begrenzt, und sind CA und CB Berührende, S der Grenzpunkt des zu AB zugeordneten Durchmessers, PQ Berührende in S, so ist $\triangle ASB = \frac{1}{2} ABC$ (S. 96, 6 a) und $\triangle CPQ = \frac{1}{4} ABC$, somit $\triangle ABS = 2\,CPQ$. Sind S_1 und S_2 die Grenzpunkte der zu AS und BS zugeordneten Durchmesser, P_1Q_1, P_2Q_2 die Berührenden in diesen Punkten, so ist ebenso: $\triangle ASS_1 = 2\,PP_1Q_1$, $\triangle BSS_2 = 2\,QP_2Q_2$. Fährt man in dieser Zerlegung unbeschränkt fort, so ist die Summe aller Dreiecke innerhalb des Parabelabschnittes gleich dem Parabelabschnitt Σ, dagegen die Summe der Dreiecke zwischen den beiden Berührenden und der Parabel gleich dem Teil der Fläche des Dreiecks ABC, welcher aufserhalb der Parabel liegt, $= \triangle ABC - \Sigma$; somit $\Sigma = 2(\triangle ABC - \Sigma)$,

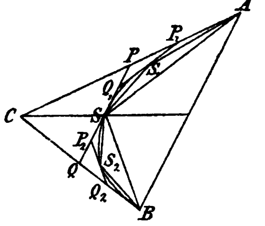


Fig. 119.

$$\Sigma = \frac{2}{3} \cdot \triangle ABC = \frac{4}{3} xy \sin\varphi,$$

wenn $AB = 2y$, wenn ferner x der zugehörige Abschnitt des Durchmessers und φ der Winkel der zugeordneten Richtungen ist.

b) Der Inhalt einer Ellipse ergiebt sich folgendermafsen.

Die Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2} x(2a - x)$ gilt bei irgend zwei einander zugeordneten Durchmessern a und b, die den Winkel φ mit einander bilden. Die Halbsehne Y des um den Durchmesser $2a$ gelegten Kreises ist im Abstand x vom Grenzpunkt des Durchmessers bestimmt durch $Y^2 = x(2a - x)$, woraus folgt $y : Y = b : a$.

Zwei Halbsehnen, deren Schnittpunkte mit dem Durchmesser nur um die sehr kleinen Strecken $\pm \frac{\varepsilon}{2}$ von dem Schnittpunkt von y (und Y) entfernt sind, schliefsen bei der Ellipse und dem Kreis Flächen ein, die (als Trapeze) den Produkten $y\varepsilon \sin\varphi$ und $Y\varepsilon$ entsprechen. Das Verhältnis beider sehr schmalen Flächenteile ist daher $y \sin\varphi : Y = b \sin\varphi : a$, und dies ist auch das Verhältnis einer Summe solcher Flächenteile in Ellipse und Kreis. Für die Fläche der Ellipse erhält man so $J = \frac{b \sin\varphi}{a} \cdot \pi a^2 = \pi ab \sin\varphi$.

Hieraus folgt, dafs für alle zugeordnete Durchmesser der Ausdruck $ab \sin\varphi$ den gleichen Wert hat, gleich dem Produkt der Halbaxen, da für diese Axen $\sin\varphi = 1$, $J = \pi ab$ ist.

Für einen Ellipsenabschnitt Σ, der durch die Sehne $2y$, und für den zugehörigen Kreisabschnitt Σ_1, der durch $2Y$ begrenzt ist, folgt $\Sigma = \frac{b \sin\varphi}{a} \Sigma_1$, während $\Sigma_1 = \frac{a^2}{2}(\text{arc } 2\alpha - \sin 2\alpha)$ und α zu bestimmen ist aus $\cos\alpha = \frac{a - x}{a}$ oder $\sin\alpha = \frac{Y}{a} = \frac{y}{b}$. Somit ist

$$\Sigma = \frac{ab}{2} \sin\varphi\,(\operatorname{arc} 2\alpha - \sin 2\alpha)$$

oder auch $\Sigma = \sin\varphi\,[ab \operatorname{arc}\alpha - (a-x)y]$, wobei $\operatorname{tg}\alpha = \frac{ay}{b(a-x)}$.

7. Ziehen wir in zwei benachbarten Punkten P und P_1 eines Kegelschnittes die Senkrechten zu den Berührenden, die man die Normalen des Kegelschnittes in diesen Punkten nennt, und schneiden diese einander in M, während die Fahrstrahlen nach den Brennpunkten F und F_1 die Winkel $PFP_1 = \alpha$, $PF_1P_1 = \alpha_1$ bilden mögen, so ist der Winkel der Senkrechten $z = \frac{\alpha + \alpha_1}{2}$ in der Ellipse, $z = \frac{\alpha - \alpha_1}{2}$ in der Hyperbel, $z = \frac{\alpha}{2}$ in der Parabel. Denn sind z. B. in der Ellipse die Winkel der Senkrechten mit den Fahrstrahlen w und w_1, so folgt aus Dreiecken mit einem Paar Scheitelwinkeln:

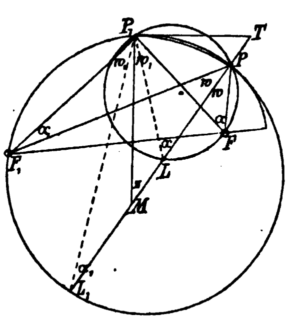
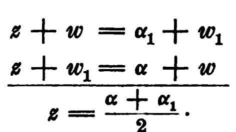


Fig. 120.



$$\begin{aligned} z + w &= \alpha_1 + w_1 \\ z + w_1 &= \alpha + w \\ \hline z &= \frac{\alpha + \alpha_1}{2}. \end{aligned}$$

Legen wir nun durch PP_1F und durch PP_1F_1 je einen Kreis, der die Senkrechte PM in L und L_1 schneiden möge, so ist $\sphericalangle PLP_1 = \alpha$, $PL_1P_1 = \alpha_1$, woraus folgt $\sphericalangle LP_1M = \alpha - z = \frac{\alpha - \alpha_1}{2}$ und $\sphericalangle L_1P_1M = z - \alpha_1 = \frac{\alpha - \alpha_1}{2}$; also halbiert die Normale P_1M den Winkel LP_1L_1. Schneidet die Berührende P_1T die Normale PM in T, so sind M, T harmonisch zugeordnete Punkte mit L, L_1 (S. 83, 5b). — Indem der Punkt P_1 sich dem Punkt P nähert, gilt das Gleiche für T. Die Kreise gehen dann in solche über, die die Berührende in P berühren, und der in der Strecke LL_1 zu P harmonisch zugeordnete Punkt M ist die *Grenzlage des Schnittpunktes der Normalen zweier Punkte des Kegelschnittes, welche einander unmessbar nahe gerückt sind.*

Denken wir uns durch drei Punkte P, P_1, P_2 des Kegelschnittes einen Kreis gelegt, so liegt dessen Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten zu PP_1 und PP_2. Rücken P_1 und P_2 unbeschränkt nahe an P heran, so werden diese Mittelsenkrechten zwei unbeschränkt nahe beieinander liegende Normalen des Kegelschnittes und der Mittelpunkt des Kreises rückt in jene Grenzlage von M. Dieser Punkt kann daher als Mittelpunkt eines Kreises betrachtet werden, welcher drei unbeschränkt nahe benachbarte Punkte mit dem Kegelschnitt gemein hat. Ein solcher Kreis heifst der Krümmungskreis des betreffenden Punktes, da er sich am meisten von allen Kreisen in diesem Punkt an den Kegelschnitt anschmiegt; sein Mittelpunkt heifst Krümmungsmittelpunkt.

Die Punkte L und L_1 werden in der Grenzlage erhalten durch $FL \perp PF$ und $F_1L_1 \perp PF_1$. Für das Teilverhältnis ergiebt sich $LM:ML_1 = PL:PL_1 = PF:PF_1 = FN:NF_1$, wenn N der Schnittpunkt der Normale mit der grofsen Axe ist. Ziehen wir MX und L_1F_2 senkrecht zu PF, so ist auch

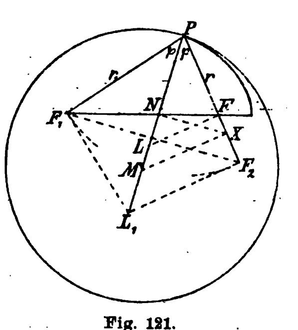


Fig. 121.

$$FX:XF_2 = LM:ML_1 = FN:NF_1,$$

daher $NX \parallel F_1F_2$, und da $F_1F_2 \perp PL_1$, so folgt nun auch $NX \perp PN_1$. Man erhält also M, indem man $NX \perp PN$, $XM \perp PF$ zieht.

Ist φ der Winkel zwischen der Normalen und den Fahrstrahlen, so ist der Krümmungshalbmesser $PM = \varrho$ bestimmt durch $\varrho \cos^2 \varphi = PN$, während aus den Flächen der Dreiecke FPN, F_1PN und FPF_1 folgt (II. § 45, 1):

$$r \cdot PN \sin \varphi + r_1 PN \sin \varphi = rr_1 \sin 2\varphi, \quad PN = \frac{2rr_1 \cos \varphi}{r + r_1} = \frac{rr_1 \cos \varphi}{a}.$$

Somit ist $\varrho = \dfrac{rr_1}{a \cos \varphi}$.

Die Senkrechten von F und F_1 auf die Berührende sind $r \cos \varphi$ und $r_1 \cos \varphi$, für die nach S. 106, 3b gilt: $rr_1 \cos^2 \varphi = a^2 - c^2 = b^2$, so dafs nun

$$\varrho = \frac{b^2}{a \cos^3 \varphi} \qquad \text{oder} \qquad \varrho = \frac{(\sqrt{rr_1})^3}{ab}.$$

Anmerkung aus der Bewegungslehre.

Eine geradlinige gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit c ergiebt in t Sekunden den Weg $y = ct$, eine geradlinige gleichförmig beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung g den Weg $x = \frac{1}{2} gt^2$. Werden beide Bewegungen nach dem Gesetz von dem Parallelogramm der Bewegungen vereinigt, so ergiebt sich für den geometrischen Ort des Punktes durch Ausscheidung von t die Gleichung $y^2 = \dfrac{2c^2}{g} \cdot x$, d. i. die Gleichung einer Parabel. Die Bewegung heifst Wurfbewegung; die Wurflinie ist eine Parabel.

Bewegt sich ein Punkt gleichförmig auf einem Kreis mit der Geschwindigkeit c, so kann seine Bewegung innerhalb eines Bahnteilchens als eine Wurfbewegung mit der nach dem Mittelpunkt gerichteten Beschleunigung γ betrachtet werden. Die Bewegung in dem Bahnteilchen setzt sich aus dem Wege $y = ct$ in Richtung der Berührenden und dem Wege $x = \frac{1}{2} \gamma t^2$ in Richtung nach dem Mittelpunkt zusammen; daher ist $y^2 = \dfrac{2c^2}{\gamma} x$, während im Kreis $y^2 = x(2\varrho - x)$ ist. Die Übereinstimmung beider Werte fordert, dafs $\dfrac{2c^2}{\gamma} x = 2\varrho x - x^2$ oder $\dfrac{2c^2}{\gamma} = 2\varrho - x$ ist. Da für ein Bahnteilchen x unbeschränkt klein anzunehmen ist, so ergiebt sich hieraus: $\gamma = \dfrac{c^2}{\varrho}$

Bezeichnet für irgend einen Zeitpunkt v die Geschwindigkeit eines Planeten, welcher sich in einer Ellipse bewegt, deren einer Brennpunkt in der Sonne liegt (I. Kepler'sches Gesetz), und ist h der Abstand dieses Brennpunktes von der Berührenden des Punktes, in welchem sich der Planet gerade befindet, so ist (nach dem II. Kepler'schen Gesetz): $vh = k$ eine unveränderliche Gröſse; da aber $h = r \cos \varphi$, wenn r der Fahrstrahl und φ der Winkel desselben mit der Senkrechten, so ist:

$$v = \frac{k}{r \cos \varphi}.$$

Wird die bis zu einem gewissen Punkt P erlangte Geschwindigkeit v nach Gröſse und Richtung durch einen Pfeil dargestellt, und tritt an ihre Stelle in dem betr. Punkt die ebenso dargestellte Geschwindigkeit v_1, so sind die durch v, r und durch v_1, r bestimmten Dreiecke (nach dem II. Kepler'schen Gesetz) einander gleich; die Verbindungsgerade der Pfeilspitzen ist parallel zu r, d. h. die Geschwindigkeit, welche zu v hinzukommt, um v_1 als Mittelgeschwindigkeit zu ergeben, fällt in die Richtung nach dem Brennpunkt.

Fig. 122.

Die Bewegung innerhalb eines Bahnelementes kann hiernach aufgefaſst werden einerseits als eine Wurfbewegung mit der Geschwindigkeit v in Richtung der Berührenden und einer gegen die Sonne gerichteten Beschleunigung g, andrerseits als eine Bewegung auf dem Krümmungskreis mit der Beschleunigung $\gamma = \frac{v^2}{\varrho}$ senkrecht zur Richtung der Berührenden. Die Beschleunigung g kann in zwei Seitenbeschleunigungen $g \sin \varphi$ und $g \cos \varphi$ in den beiden genannten Richtungen zerlegt werden; somit ist $g \cos \varphi = \gamma = \frac{v^2}{\varrho}$ und $g = \frac{v^2}{\varrho \cos \varphi} = \frac{k^2}{r^2 \varrho \cos^3 \varphi} = \frac{ak^2}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2}$, d. h. die Beschleunigung ist dem Quadrat der Entfernung vom Brennpunkt umgekehrt proportional (Newton's Gravitationsgesetz).

Anhang.

Zehntes Kapitel.

Von der Abbildung von Gestalten des körperlichen Raumes auf der Ebene.

§ 42. Grund- und Aufrifs von Punkten, Geraden und Ebenen.

1. Werden die Punkte eines räumlichen Gebildes von parallelen Geraden bestrahlt, so bestimmen deren Schnittpunkte mit einer Ebene ein Bild paralleler Bestrahlung oder eine Parallelprojektion des Gebildes. Dieses Bild wird Rifs, Grundrifs oder Aufrifs (Normalprojektion) genannt, wenn die Parallelstrahlen senkrecht zur Bildebene sind (§ 5), im andern Falle schiefe Abbildung.

Für die Parallelbestrahlung gelten die Sätze:

a) *Punkte einer Gerade und Strahlen eines Punktes werden wieder als solche abgebildet, ebenso parallele Gerade* (§ 2, 3a und § 5, 5).

b) *Das Bild einer Punktreihe ist dieser ähnlich* (§ 5, 6b).

c) *Die Bilder paralleler Strecken stehen im selben Verhältnis, wie die Strecken selbst* (§ 5, 6b).

d) *Strecken, welche der Bildebene parallel sind, werden in wahrer Gröfse abgebildet, ebenso Winkel und ebene Figuren, deren Ebene parallel der Bildebene ist.*

2. Für gewerbliche Zwecke am geeignetsten ist die Abbildung der Körper durch die senkrechte Bestrahlung auf zwei zu einander senkrechten Bildebenen, deren eine α wagrecht (Horizontalebene), die andere β lotrecht (Vertikalebene) ist. Die Abbildung in ersterer Ebene heifst Grundrifs (Horizontalprojektion), die in der zweiten Ebene Aufrifs (Vertikalprojektion); die Schnittgerade beider Ebenen heifst Axe. Die Lehre von der Abbildung räumlicher Gebilde in Grund- und Aufrifs wird darstellende Geometrie genannt.

Fällen wir von einem Punkt P auf die genannten Ebenen die Senkrechten PP_1 und PP_2 (Fig. 123), so sind P_1 und P_2 die Bilder des Punktes, und die genannten Strecken bestimmen ein Rechteck, von welchem die P gegenüberliegende Ecke Q auf der Axe OX liegt. Hierbei ist $P_2Q = PP_1$ und $P_1Q = PP_2$. Da man schliefslich beide

Bilder in einer Ebene erhalten will, so klappt man die eine Bildebene um die Axe in die andere um, wobei P_1, Q, P_2 in eine einzige zur Axe senkrechte Gerade zu liegen kommen.

a) *Grund- und Aufriſs eines Punktes liegen in einer Senkrechten zur Axe.*

b) *Der Abstand des Bildes eines Punktes in einer Bildebene von der Axe ist gleich dem Abstand des Punktes selbst von der andern Bildebene.*

c) *Für einen Punkt der einen Bildebene liegt das Bild auf der andern Bildebene in der Axe.*

Z. B. ist Q der Grundriſs von P_2 und auch der Aufriſs von P_1.

Von den beiden durch die Axe getrennten Halbebenen wird jede doppelt als Bildebene benutzt, indem beide Bildebenen unbegrenzt zu denken sind und bei der Umklappung je zwei Halbebenen einander decken. Ob ein Punkt dem Grundriſs oder Aufriſs zuzuordnen ist, wird durch die angehängte Marke (Index) angezeigt.

3. Jeder Punkt der Geraden PP_1 hat seinen Grundriſs in P_1; der Aufriſs dieser Geraden ist QP_2.

a) *Von einer Senkrechten zu einer Bildebene ist das Bild in dieser ein Punkt, in der andern Bildebene eine Senkrechte zur Axe.*

Trifft eine durch P parallel zur Grundriſsebene gezogene Gerade die Aufriſsebene in S_2, so ist die Ebene P_2PS_2 parallel zur Grundriſsebene (§ 1, 9), somit P_2S_2 parallel der Axe, d. h.:

b) *Von jeder zu einer Bildebene parallelen Geraden ist das Bild in der andern Bildebene parallel zur Axe.*

Der Schnittpunkt einer Geraden mit einer Bildebene heiſst deren Spurpunkt.

4. Die Ebene $PP_1S_1S_2$ steht senkrecht zur Grundriſsebene; P_1S_1 ist ihre Schnittgerade mit der Grundriſsebene, S_1S_2 die mit der Aufriſsebene. Die Schnittgeraden einer Ebene mit den Bildebenen heiſsen die Spuren der Ebene. Es ist S_1S_2 senkrecht zur Axe als Schnitt zweier zur Grundriſsebene senkrechten Ebenen. Alle Punkte der genannten Ebene $PP_1S_1S_2$ haben ihren Grundriſs in P_1S_1.

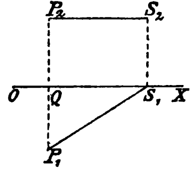
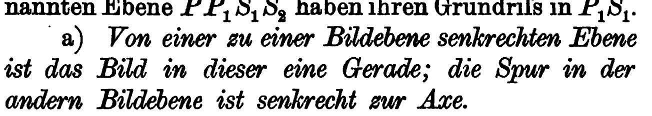


Fig. 123.



a) *Von einer zu einer Bildebene senkrechten Ebene ist das Bild in dieser eine Gerade; die Spur in der andern Bildebene ist senkrecht zur Axe.*

Für die zum Grundriſs parallele Ebene P_2PS_2 ist P_2S_2 die Spur und Abbildung im Aufriſs.

b) *Von einer parallelen Ebene zu einer Bildebene ist das Bild in der andern Bildebene eine zur Axe parallele Gerade.*

Das Dreieck P_2PS_2 wird hierbei nach 1 d durch QP_1S_1 in seiner wahren Gestalt abgebildet.

5. Um die wahre Gröſse einer Strecke, eines Winkels oder die

wahre Gestalt einer ebenen Figur aus Grund- und Aufriſs zu erhalten, wird die Ebene derselben um eine ihrer Spuren in die betr. Bildebene umgelegt (aufgeklappt) oder um eine Drehaxe, welche parallel einer Bildebene ist, in die parallele Lage zu dieser Bildebene gedreht.

Für diese Drehungen sind folgende Sätze von Bedeutung:

a) *Das Bild eines R ist wieder ein R, wenn ein Schenkel in der Bildebene liegt oder mit ihr parallel ist* (§ 5, 3).

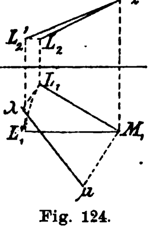
b) *Bei einer Drehung um eine Axe, welche senkrecht zu einer Bildebene ist, beschreibt das Bild eines bewegten Punktes in dieser Bildebene einen Kreisbogen um den Spurpunkt der Drehaxe; das Bild des Punktes in der andern Bildebene beschreibt eine Parallele zur Axe.*

Die Bewegung geht nämlich in einer zu ersterer Bildebene parallelen Ebene vor sich, so daſs der Satz aus 1 d und 4 b folgt.

c) *Bei einer Drehung um eine Axe, die parallel einer Bildebene ist, beschreibt das Bild eines Punktes in dieser Bildebene eine Senkrechte zum Bild der Drehaxe.*

Es folgt dies aus a), da eine Senkrechte von dem Punkt zur Drehaxe auch in dem Bild senkrecht bleibt.

6. Zur Bestimmung der wahren Länge einer Strecke LM, deren Grund- und Aufriſs L_1M_1 und L_2M_2 gegeben sind, kann die Ebene LMM_1L_1 um MM_1 in parallele Lage zur Aufriſsebene gedreht werden, so daſs L_1 den Kreisbogen L_1L_1' bis zu der zur Axe Parallelen M_1L_1' beschreibt, während L_2 parallel zur Axe nach L_2' gelangt; M_2L_2' ist die wahre Länge. Oder es kann dieselbe Ebene LMM_1L_1 um L_1M_1 in den Grundriſs aufgeklappt werden, wobei die Winkel an der Drehaxe rechte sind, und die Längen der Senkrechten λL_1 und μM_1 den Abständen von M_2 und L_2 bis zur Axe gleich sind.

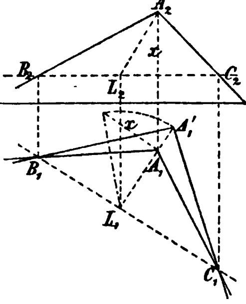

Fig. 124.

In gleicher Weise könnte auch die Ebene LMM_2L_2 benutzt werden.

7. Aus 2 a folgt:

Von zwei einander schneidenden Linien liegen der Schnittpunkt der Grundrisse und der der Aufrisse in einer Senkrechten zur Axe.

Zur Bestimmung der wahren Gröſse des Winkels zweier Geraden BAC, deren Bilder B_1A_1, B_2A_2 und A_1C_1, A_2C_2 (Fig. 125) gegeben sind, wird zunächst durch beide Gerade eine wagrechte Gerade BC gezogen, von welcher der Aufriſs B_2C_2 parallel der Axe ist, der Grundriſs B_1C_1 nach dem eben genannten Satze erhalten wird. Um diese Gerade BC wird das Dreieck BAC in eine parallele Lage zur Grundriſsebene gedreht. Der Grundriſs der Senkrechten AL auf BC bleibt hierbei senkrecht


Fig. 125.

zu $B_1 C_1$ (5 c) und ihre wahre Länge $A_1' L_1$ kann nach 6 bestimmt werden. Dann ist $\sphericalangle B_1 A_1' C_1 = BAC$ (1 d).

8. In Bezug auf die gegenseitige Lage der Gebilde Punkt, Gerade, Ebene folgt zunächst:

a) *Der Spurpunkt einer Geraden, die einer Ebene angehört, liegt auf der Spur dieser Ebene.*

Durch zwei solcher Spurpunkte ist daher die Spur der Ebene bestimmt.

b) Ist von einer Geraden, die der Ebene $L_1 M N_2$ angehört, ein Bild, etwa der Grundriſs $T_1 S_1$, gegeben, so findet man das andere Bild, indem der Durchgang T_1 auf die Axe, der Axenpunkt S_1 auf die zweite Spur der Ebene nach S_2 abgestrahlt wird; $T_2 S_2$ ist der Aufriſs.

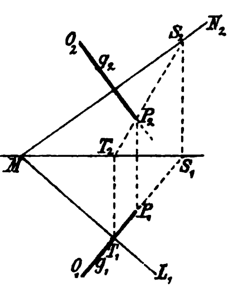


Fig. 126.

c) Sind von der Ebene nicht die Spuren, sondern nur (Fig. 127) die Bilder zweier Geraden $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ gegeben, und werden a_1, b_1 von dem Grundriſs der Geraden in T_1, S_1 geschnitten, so erhält man T_2, S_2 auf a_2 und b_2 durch Senkrechte zur Axe (7).

d) Ist von einem Punkt der Ebene der Grundriſs P_1 gegeben und der Aufriſs gesucht, so zieht man durch ihn die Gerade $T_1 S_1$, zeichnet den zugehörigen Aufriſs $T_2 S_2$ und zieht von P_1 eine Senkrechte zur Axe, welche $T_2 S_2$ im Aufriſs P_2 des Punktes trifft.

e) Die Ebene, die man senkrecht zur Grundriſsebene durch den Grundriſs $T_1 S_1$ einer Geraden legt, ist Strahlenebene für alle Gerade, deren Grundriſs $T_1 S_1$ ist. Sind g_1 und g_2 die Bilder einer solchen Geraden, so findet man den Schnittpunkt dieser Geraden und der Ebene $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, indem man, wie angegeben, die Schnittgeraden $T_2 S_2$ der Ebene mit der Strahlenebene der Geraden zeichnet und den Schnittpunkt P_2 dieser Geraden mit g_2 nach P_1 abstrahlt; $P_1 P_2$ sind die Bilder des fraglichen Schnittpunktes.

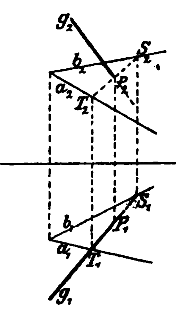
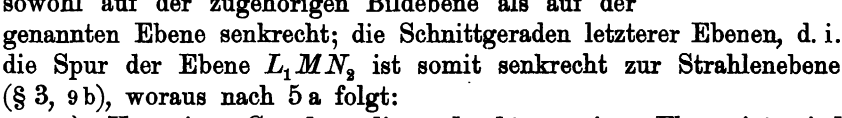


Fig. 127.

9. Steht eine Gerade g auf der Ebene $L_1 M N_2$ (Fig. 126) senkrecht, so steht ihre Strahlenebene sowohl auf der zugehörigen Bildebene als auf der



genannten Ebene senkrecht; die Schnittgeraden letzterer Ebenen, d. i. die Spur der Ebene $L_1 M N_2$ ist somit senkrecht zur Strahlenebene (§ 3, 9 b), woraus nach 5 a folgt:

a) *Von einer Geraden, die senkrecht zu einer Ebene ist, sind die Bilder senkrecht zu den zugehörigen Spuren der Ebene.*

b) Der A b s t a n d eines Punktes O von einer Ebene $L_1 M N_2$ (Fig. 126) ist hiernach durch die in 8 und 6 gelösten Aufgaben zu bestimmen.

c) Der Winkel einer Geraden und Ebene wird gefunden, indem man durch einen Punkt der ersteren eine Senkrechte zu der Ebene zieht und den Winkel beider Geraden nach 7 bestimmt; dieser ergänzt den fraglichen Winkel zu einem Rechten.

10. Sind P_1R, RS_2 und P_1Q, QS_2 die Spuren zweier Ebenen, so sind P_1 und S_2 zwei Punkte der Schnittgeraden beider Ebenen. Indem man beide Punkte auf die Axe abstrahlt, erhält man die Bilder dieser Schnittgeraden P_1S_1, P_2S_2.

Um den Winkel zweier Ebenen P_1RS_2 und P_1QS_2 zu erhalten, klappt man den Winkel zwischen der Schnittgeraden beider Ebenen und ihrem Grundrifs um letzteren in die Grundrifsebene auf nach $S_1P_1S_2'$; eine Senkrechte $B_2'C_1$ zu P_1S_2' bestimmt dann, in ihre ursprüngliche Lage zurückgedreht, mit der Senkrechten $A_1C_1D_1$ zu P_1S_1 eine Ebene, die senkrecht zur Schnittgeraden beider Ebenen ist und in welcher die Schenkel des betr. Ebenenwinkels liegen. Die Gröfse dieses Winkels A_1BD_1 ergiebt sich bei der Umklappung um A_1D_1, wobei B auf S_1P_1 zu liegen kommt (5 c) und zwar in der Entfernung $C_1B_1' = C_1B_2'$ von C_1; es ist $\sphericalangle A_1B_1'D_1$ der gesuchte Winkel.

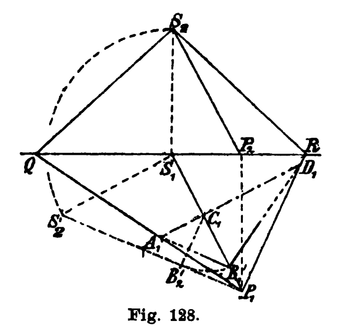


Fig. 128.

§ 43. Abbildung in Bezug auf ein Axenkreuz.

Krystall-Abbildung.

1. Wie in § 15 angegeben wurde, wird die Lage der räumlichen Gebilde festgestellt in Bezug auf drei Strahlen eines Punktes OX, OY, OZ, die sog. Koordinatenaxen, welche meist zu einander senkrecht angenommen werden. Die Lage eines Punktes in Bezug auf sie wird durch die zu ihnen parallelen Strecken von dem Punkt bis zu den Ebenen der Axen bestimmt, d. h. durch die Koordinaten des Punktes. Werden sowohl von den Axen OX, OY, OZ, als von den Koordinaten der Punkte die Bilder auf eine Ebene mittels Parallelstrahlen entworfen, so erhält man eine axonometrische Abbildung. Die Koordinaten stehen dann in dieser Abbildung in unveränderlichem Verhältnis mit den entsprechenden räumlichen Koordinaten (§ 42, 1 c). Dieses Verhältnis wird dadurch bestimmt, dafs man auf die Axen die Strecke 1 abträgt, $OX = OY = OZ = 1$ und deren Bilder bestimmt.

2. Die einfachste Art dieser Abbildung ist die, dafs man zwei Axen OX und OZ des Axenkreuzes in die Bildfläche selbst verlegt,

die dann einen rechten Winkel mit einander bilden und auf den die Streckeneinheiten OX und OZ sich in wahrer Gröfse darstellen. Von der dritten Axe, die in O auf diesen senkrecht steht, kann der Endpunkt der Einheit nach jedem beliebigen Punkt der Bildebene durch einen schrägen Strahl abgebildet werden, so dafs das Bild OY dieser Axe durch jeden beliebigen Strahl von O, und das Bild der Einheit auf ihr durch jede beliebige Strecke dieses Strahles dargestellt werden kann. Häufig wird OY unter 30^0 oder 150^0 gegen OX geneigt und $OY = \frac{1}{3} OX$ angenommen (vgl. Fig. 129).

Die Lage einer Ebene gegen das Axenkreuz wird durch die drei Abschnitte bestimmt, welche die Schnittpunkte der Ebene auf den Axen begrenzen.

Setzt man auf die Zeichenebene in O einen senkrechten Stift von der Länge $OX = OZ = 1$, so erhält man in der Geraden von dessen Grenzpunkt nach Y den Strahl, in dessen Richtung man das Auge versetzen mufs, um das Bild thunlichst körperlich erscheinen zu lassen.

3. Diese Darstellungsart wird besonders in der Krystallographie angewendet. Man zeichnet mit Hilfe der Schnittpunkte jeder Ebene des Krystalles mit den Axen die Schnittgeraden dieser Ebenen mit den Axenebenen und erhält mittels der Schnittpunkte dieser Schnittgeraden Punkte der Kanten des betr. Körpers.

a) So wird das regelmäfsige Oktaëder (dessen Flächen auf den Axen Abschnitte ergeben, die im Verhältnis $1:1:1$ stehen) dargestellt durch die Verbindungstrecken der sechs Grenzpunkte der von O aus auf den Strahlen und Gegenstrahlen des Axenkreuzes aufgetragenen Einheiten.

b) Die Kanten des Tetraëders werden erhalten, indem man durch die Ecken einer Oktaëderfläche Parallele zu den Gegenseiten zieht und dies wiederholt für weitere Flächen des Oktaëders, die keine Kanten mit einander gemein haben.

c) Der Würfel (Axenschnittverhältnis $1:\infty:\infty$) wird erhalten, indem man in jeder Ebene zweier Axen das Bild des Quadrates zeichnet, dessen Seitenmitten die Endpunkte der Einheiten auf den Axen sind, und dann durch die Ecken dieser Vierecke die Parallelen zur dritten Axe zieht.

d) Das Rhombendodekaëder $(1:1:\infty)$ wird erhalten, indem man je einen Grenzpunkt einer Axeneinheit mit den Ecken des eben angegebenen Quadrates verbindet, das in der Ebene der beiden andern Axen liegt.

e) Ein Ikositetraëder oder Vierundzwanzigflächner, von welchem jede Fläche auf den Axen drei Strecken begrenzt, die im Verhältnis $1:2:2$ stehen, wird dargestellt, indem man zunächst auf die Axen die Strecken 1 und 2 abträgt und in jedem Axenwinkel die

beiden Punktpaare verbindet und dann von dem Schnittpunkt ihrer Verbindungsgeraden den Strahl in der Richtung nach dem Punkt im Abstand 2 auf der dritten Axe zieht und zwar nur bis zum Schnittpunkt mit einem ebenso erhaltenen Strahl. Es entstehen in jedem Achtel des Axenkreuzes die Bilder dreier gleichschenkeligen Vierecke.

f) Werden dagegen zunächst die Kanten des Oktaëders gezeichnet und dann von jeder Ecke der Strahl in der Richtung nach dem in e) angegebenen Schnittpunkt der Verbindungsgeraden der Endpunkte von 1 und 2 in der gegenüberliegenden Axenebene gezogen, so entsteht das Triakisoktaëder oder das Pyramidenoktaëder mit dem Axenverhältnis 1 : 1 : 2.

g) Ein Tetrakishexaëder oder Pyramidenwürfel, dessen Flächen auf den Axen das Streckenverhältnis $1 : 2 : \infty$ ergeben, wird entworfen, indem man zunächst wieder die Strecken 1 und 2 auf den Axen anträgt (Fig. 129). Die Verbindungsgeraden XZ_1 und ZX_1 sind die Schnittgeraden der Axenebene XOZ mit zwei Ebenen, welche parallel OY sind und daher sich in einer Kante $P_1E_1 \parallel OY$ schneiden. In gleicher Weise erhält man die Kanten P_2E_1 und P_3E_1, welche die erstere in einem Punkt E_1 schneiden. Von diesem Punkt gehen noch die Kanten nach den Punkten X, Y, Z, so daſs in E_1 ein Sechskant entsteht. In gleicher Weise werden die Gegenrichtungen zu OX, OY, OZ benützt.

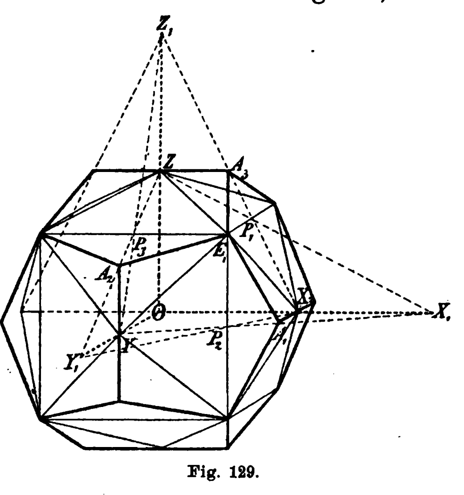


Fig. 129.

h) Der Achtundvierzigflächner oder das Hexakisoktaëder mit den Axenabschnitten im Verhältnis $1 : 1\frac{1}{2} : 2$ wird ähnlich wie in e) und f) ausgeführt.

i) Aus diesen Körpern werden solche mit der halben Flächenzahl erhalten, wie oben bei dem Tetraëder gezeigt wurde. Denken wir uns z. B. von den Ebenen des Pyramidenwürfels (Fig. 129) nur die Hälfte vorhanden und zwar je zwei nicht an einer Kante desselben zusammenstoſsende Flächen, wie XP_1E_1, YP_2E_1 und ZP_3E_1, so entsteht an E_1 ein Dreikant. Bei X, Y, Z schneiden die betr. Ebenen die mit ihnen in Bezug auf die Axenebene beiderseits gleichliegenden Ebenen in drei Parallelen zu den Axen $XA_1 \parallel OY$, $YA_2 \parallel OZ$, $ZA_3 \parallel OX$, welche jeweils durch die Verbindungsgeraden X_1Y, Y_1Z,

$Z_1 X$ begrenzt werden; $E_1 A_1$, $E_1 A_2$, $E_1 A_3$ sind die Kanten des Dreikants. Man erhält so (als hemiëdrischen Körper des Tetrakishexaëders) ein Pentagondodekaëder.

§ 44. Abbildung der Kugeloberfläche.

Kartennetze.

1. Von den Umdrehungsflächen Kegel-, Cylinder- und Kugelfläche lassen sich nur die beiden ersteren in die Ebene aufrollen, und so läfst sich ein ebenes Bild irgend welcher auf ihnen gezeichneten Figuren erhalten. Die Abbildung der Figuren einer Kugelfläche aber ist besonders von Wichtigkeit wegen ihrer Anwendung zur Darstellung der Erdoberfläche oder des Fixsternhimmels. Es werden bei den hierzu dienenden Kartennetzen zuerst die Meridiane und Parallelkreise nach bestimmten Gesetzen gezeichnet und im Anschlufs an diese dann die einzelnen Orte eingetragen. Wir geben im Folgenden einige der gebräuchlichsten Darstellungsarten.

Die Bildebene können wir uns stets als Berührungsebene irgend einer Kugel vorstellen, auf welcher das Gradnetz entworfen ist, da die Bilder auf parallelen Ebenen ähnlich sind. Der Berührungspunkt der Bildebene stellt den Mittelpunkt der Karte dar, wonach das Netz verschieden ausfällt, je nachdem der Punkt der Pol ist, — oder auf dem Äquator liegt, — oder irgend einem Breitegrad angehört.

2. Das orthographische Kartennetz ist die Darstellung des Kugelnetzes nach Grund- oder Aufrifs. Berührt die Grundrifsebene einen Pol, so giebt der Aufrifs das Netz mit dem Äquator in der Mitte. Im Grundrifs werden die Parallelkreise als Kreise um den Pol, die Meridiane als Durchmesser dargestellt, welche gleiche Winkel mit einander bilden. Im Aufrifs werden die Parallelkreise als parallele Sehnen dargestellt, die als Durchmesser der Parallelkreise im Grundrifs benutzt werden. Man überträgt dann noch die Schnittpunkte der Parallelkreise und Meridiane aus dem Grundrifs in den Aufrifs und zeichnet die Meridiane als halbe Ellipsen. — Um für einen Punkt irgend welcher geographischen Breite als Kartenmittelpunkt das Netz zu erhalten, zeichnet man den zuvor entworfenen Aufrifs mit gedrehter Axe ab, der Art, dafs der betr. Punkt an die höchste Stelle kommt und entwirft hierzu den Grundrifs, in welchem alle Punkte die gleiche Entfernung von der Axe behalten, wie in dem zuvor entworfenen Grundrifs (§ 42, 5 b).

3. Die Abbildungen einer Kugel lassen sich nach der Lage des Strahlpunktes einteilen in solche, bei welchen der Strahlpunkt im Kugelmittelpunkt liegt oder auf der Kugeloberfläche oder in einem beliebigen andern Punkt. Liegt der Strahlpunkt im Mittelpunkt

der Kugel (centrale, gnomonische Projektion), so werden die Bogen aller Hauptkreise als Strecken (kürzeste Abstände) dargestellt. Mit zunehmender Entfernung vom Mittelpunkt der Karte (dem Grundrifs des Strahlpunktes auf der Bildebene) werden gleiche Bogen mehr und mehr wachsend dargestellt, und die Punkte, die um $^1/_4$ des Kreises von jenem entfernt sind, fallen in unendliche Entfernung. Die Erdoberfläche wird hierbei meist auf die Flächen eines regelmäfsigen Körpers, welcher der Kugel umbeschrieben ist, abgebildet.

4. Bei dem stereographischen Netz (Hipparch, 150 v. Chr.) wird ein Punkt C der Kugeloberfläche als Strahlpunkt und die Berührungsebene im gegengesetzten Punkt M (oder irgend eine mit ihr parallele Ebene) wird als Bildebene angenommen. Es sei APB irgend ein Kreis der Kugel und A_1B_1 sein Bild auf die in M berührende Ebene. Wird nun durch CM die Ebene CAB senkrecht zur Ebene APB gelegt, so ist die erstere Ebene der Hauptaxenschnitt des Strahlenkegels (S. 52, 1) und senkrecht zur Bildebene; zugleich ist $\sphericalangle\, CAB = CB_1A_1$, da letzterer Winkel gleich dem Winkel von CB mit der Berührungsebene in C ist. Die Bildebene $A_1P_1B_1$ ist somit Wechselschnitt zur Ebene des Kreises AB, also auch das Bild A_1B_1 ein Kreis (S. 54, 6). — Schneiden einander die Berührenden eines Punktes P und seines Bildes P_1 in Q, so ist (nach S. 85, 2 Anmerk.) $PQ = P_1Q$. Wird der Kreis AB in P von einem zweiten Kreis geschnitten, so gilt ebenso für die Berührende desselben $PL = P_1L$, wenn L deren Schnittpunkt ist. Da aufserdem $QL = QL$, so folgt, dafs $\sphericalangle\, QPL = QP_1L$. Somit ist erwiesen:

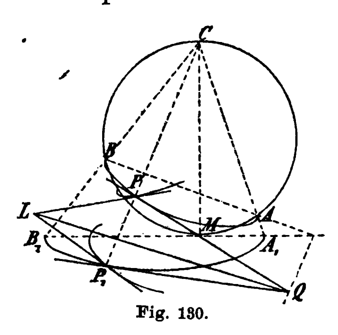


Fig. 130.

a) *In der stereographischen Darstellung wird jeder Kreis wieder als Kreis (oder als Gerade) abgebildet.*

b) *Der Schnittwinkel zweier Kreise bleibt in dieser Abbildung unverändert.*

Hieraus folgt, dafs die kleinsten Teile der Abbildung ähnlich den entsprechenden Teilen auf der Kugel sind. Abbildungen, welche diese Eigenschaft haben, nennt man winkeltreue (isogonale oder konforme).

In Fig. 131 b ist das stereographische Netz für einen Punkt von 60° Breite entworfen. Fig. 131 a stellt zunächst zu diesem Zweck den Aufrifs der abzubildenden Halbkugel auf einer zur Bildebene der zweiten Figur senkrechte Ebene dar. Der Strahlpunkt ist C, und letztere Bildebene erscheint als Gerade A_1B_1 verkürzt; sie ist parallel

zur Berührungsebene in C durch den Mittelpunkt der Kugel gelegt. Der Meridian $A_1 N_2 B_1$ wird als Durchmesser ANB dargestellt; seine Schnittpunkte mit den Parallelkreisen 0°, 30°, 60° werden erhalten, indem die betreffenden Punkte in Fig. 131 a zunächst von C auf $A_1 B_1$ übertragen werden und dann durch Senkrechte zu $A_1 B_1$ auf AB; man erhält so von jedem Parallelkreis den Durchmesser auf AB. Sollte ein Grenzpunkt eines solchen Durchmessers zu weit hinausfallen, so entwirft man das Bild des Schnittpunktes von $A_1 B_1$ mit dem in Fig. 131 a als Gerade dargestellten Parallelkreis auf dem Umfang des Kreises AB in Fig. 131 b und erhält so einen oder zwei Punkte des Kreises. Die beiden Pole $N_2 S_2$ werden nach $N_1 S_1$ und von da nach NS abgestrahlt. An diese Sehne NS trägt man als Berührungswinkel 30°, 60°, 90° an; die zugehörigen Kreisbogen sind die Meridiane.

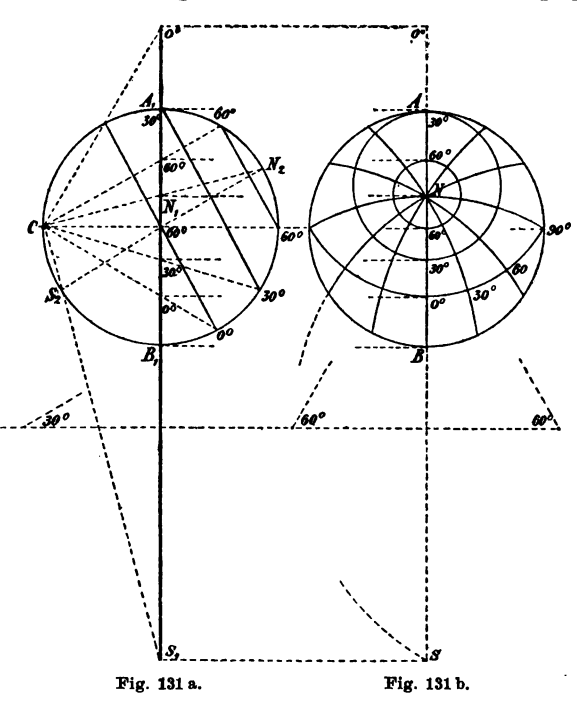


Fig. 131 a. Fig. 131 b.

5. Andere, nicht durch Bestrahlung entstehende Kartennetze erhält man, indem man das Bild zunächst auf einer Kegel- oder Cylinderfläche dargestellt und diese dann in die Ebene aufgerollt denkt. Der Kegel wird entweder als die Kugel berührend in dem die Mitte der Karte einnehmenden Parallelkreis oder als die Kugel in zwei Parallelkreisen schneidend angenommen. Diese Kreise, sowie der mittlere Meridian der Karte werden durch die Schnitte ihrer Ebenen mit dem Kegel dargestellt; für die übrigen Parallelkreise ergeben sich Kreise um denselben Mittelpunkt, deren Abstände den Bogen des mittleren Meridians entsprechen. Die Meridiane werden als Seitengeraden des Kegels durch die Grenzpunkte der entsprechenden Bogen der erstgenannten Parallelkreise abgebildet oder als krumme Linien durch die Grenzpunkte der auf allen Parallelkreisen bestimmten Bogen.

Tritt an die Stelle des Parallelkreises der Äquator, so ist die zugehörige abwickelbare Fläche ein Cylinder. Meridiane und Parallelkreise bilden dann ein aus Rechtecken bestehendes Netz. Da die Meridiane gegen die Pole zusammenlaufen, hier aber als Parallele abgebildet werden, so wächst das Verhältnis der abgebildeten Bogen der Parallelkreise zu den entsprechenden wahren Bogen mehr und mehr mit zunehmender Breite und zwar im Verhältnis $1 : \cos\varphi$, wenn φ die geographische Breite ist, da die Halbmesser der Parallelkreise im Verhältnis $\cos\varphi$ stehen. Werden die Abstände der Parallelkreise, d. i. die Bogen der Meridiane in demselben Maſse vergröſsert, so erhält man Mercator's Projektion*); die Teile der Karte wachsen gegen die Pole hin bis ins Unendliche, sind also für diese Punkte selbst nicht ausführbar. In diesem Netz zeigt sich hiernach eine von zwei benachbarten Parallelkreisen und zwei solchen Meridianen begrenzte Fläche als ein Rechteck, dessen Seitenverhältnisse um so mehr mit den wirklichen Verhältnissen übereinstimmen, je kleiner die Fläche ist. Es ist somit diese Darstellung eine in den kleinsten Teilen ähnliche, also winkeltreue.

Da eine Gerade in dieser Darstellung alle Meridiane unter demselben Winkel schneidet, so gilt dies auch für die ihr entsprechende Linie auf der Kugel, die Loxodrome, (welche ein Schiff durchläuft, das seinen Kurs immer nach einerlei Himmelsrichtung einhält). Auf dem Cylinder, dessen Abwickelung die Karte ergiebt, ist sie eine Schraubenlinie; auf der Kugel entspricht ihr demnach eine krumme Linie, welche sich dem Pol in unendlich vielen Windungen nähert, ohne ihn zu erreichen.

Flächentreue Abbildungen geben die Flächenteile der Kugel in dem der Wirklichkeit entsprechenden Verhältnis.

§ 45. Bestimmung des Gesichtspunktes zu einem Bild von baulichen Gegenständen.

1. Wenn der Zweck einer Abbildung körperlicher Gestalten auf einer Ebene der ist, auf unser Auge thunlichst denselben Eindruck zu machen wie erstere selbst, so wird ein künstlerisches oder ein malerisches Bild entworfen, wie es sich ergiebt, wenn ein Auge der Strahlpunkt ist und die Bildfläche lotrecht zwischen Auge und Gegenstand liegt. Der Strahlpunkt wird der Gesichtspunkt genannt

---

*) Dieses Netz wurde ausgedacht und zuerst (1569) bei der Zeichnung einer Weltkarte benutzt von dem deutschen Geographen Gerhard Kremer, genannt Mercator, aus Duisburg (1512—1594). Er lieſs die Längen der Meridianbögen von ganzem Grad zu Grad im Verhältnis $1 : \cos\varphi$ wachsen, was annähernd an Stelle stetigen Wachsens genommen werden kann.

und der Fuſspunkt der Senkreckten von ihm auf die Bildebene der Hauptpunkt.

Für die Bilder von Geraden und von ebenen Figuren gelten hier natürlich die im III. Abschnitt gegebenen Sätze. Aber auch für Gerade, welche nicht einer einzigen Ebene angehören, ergeben sich leicht die folgenden Sätze:

a) *Gerade, die unter sich und zur Bildebene parallel sind, werden als Parallele abgebildet.*

b) *Die Bilder paralleler Geraden, die nicht parallel der Bildebene sind, laufen in einem Punkt, dem Fluchtpunkt, zusammen, welcher auf dem zu den Geraden parallelen Strahl des Gesichtspunktes liegt.*

c) *Von allen Geraden paralleler Ebenen liegen die Fluchtpunkte auf einer einzigen Geraden, auf der Fluchtgeraden dieser Ebenen; es ist dies die Schnittgerade der zu den Ebenen parallelen Ebene durch den Gesichtspunkt.*

d) *Der Hauptpunkt ist der Fluchtpunkt aller Senkrechten zur Bildfläche; die Wagrechte durch ihn enthält die Fluchtpunkte aller wagrechten Geraden.*

Diese Gerade heiſst der Horizont des Bildes.

2. Wir wollen hier nicht weiter ausführen, wie solche künstlerische Bilder zu entwerfen sind, sondern nur die Aufgabe lösen, wie zu einem Bilde der Gesichtspunkt zu finden ist, von welchem aus man das Bild betrachten muſs, damit es den dargestellten Gegenständen am besten entspricht. Das Mittel hierzu bilden die Darstellungen von Gegenständen, an welchen quadratische oder rechteckige Flächen vorkommen.

Sind auf dem Bild zwei parallele wagrechte Gerade dargestellt, so verlängert man die Bilder dieser Geraden bis zu ihrem Schnittpunkt und zieht durch diesen eine wagrechte Gerade. Die Höhe des Gesichtspunktes ist dann bestimmt durch die wagrechte Ebene dieser Geraden.

3. Ist in der Zeichnung ein wagrechtes Quadrat oder Rechteck dargestellt, von dem eine Seite parallel der Bildfläche ist — was man daraus erkennt, daſs auch ihre Abbildung wagrecht ist —, so stellen die angrenzenden Seiten Senkrechte zur Bildebene dar; sie schneiden einander im Hauptpunkt. Der Gesichtspunkt liegt auf der in diesem Punkt senkrecht zur Bildebene errichteten Geraden.

Liegt zunächst die Darstellung eines Quadrates vor, so trifft eine Eckenlinie in dem Bild den durch den Hauptpunkt gelegten Horizont in einem Punkt (Distanzpunkt), dessen Abstand vom Hauptpunkt zugleich den Abstand des Gesichtspunktes von letzterem giebt, da die Eckenlinie unter einem Winkel von 45° gegen die Bildebene

geneigt ist und der Sehstrahl nach dem Fluchtpunkt der Eckenlinie zu dieser parallel ist.

Für den Fall, dafs statt des Quadrates ein Rechteck dargestellt ist, dessen Seitenverhältnis $a : b$ aus der Zeichnung erkennbar ist (z. B. bei einer Säulenhalle aus der Zahl der Säulen in beiden Richtungen, bei einem Hause an der Zahl der Fenster), verhält sich auch die Strecke zwischen dem Fluchtpunkt der Eckenlinie (auf dem Horizont) und dem Hauptpunkt zum Abstand des Gesichtspunktes von letzterem wie $a : b$, wonach dieser Abstand bemessen werden kann.

4. Ist ein wagrechtes Quadrat oder Rechteck ohne eine zur Bildebene parallele Seite dargestellt, so liegt der Gesichtspunkt auf dem Kreis, der um die Strecke zwischen beiden Fluchtpunkten der Seiten als Durchmesser in der wagrechten Ebene dieser Strecke gelegt wird; denn die Strahlen von dem Gesichtspunkt nach den Fluchtpunkten müssen, als Parallele zu den Seiten des Quadrates oder Rechtecks, einen R mit einander bilden.

Liegt zunächst das Bild eines Quadrates vor, so mufs dieser R von der Geraden nach dem Fluchtpunkt einer Eckenlinie halbiert werden. Wird der genannte Kreis um den wagrechten Durchmesser in die Bildebene umgeklappt, so giebt die Verbindungsgerade der Mitte des einen Halbkreises mit dem Fluchtpunkt der Eckenlinie den Durchmesser, dessen anderer Grenzpunkt der Gesichtspunkt ist, sobald der Kreis wieder wagrecht gelegt wird, so dafs letzterer Punkt vor die Bildfläche kommt.

Ist dagegen das Bild eines Rechtecks gegeben, dessen Seitenverhältnisse man kennt, so ist statt der Mitte des Halbkreises hinter der Bildfläche der Grenzpunkt des Bogens zu bestimmen, welcher dem Winkel der Eckenlinie mit einer der Seiten entspricht. Man trägt diesen Winkel am Fluchtpunkt der andern Seite an dem Horizont in den Halbkreis und erhält auf diesem durch den zweiten Schenkel des Winkels den Punkt, der mit dem Fluchtpunkt der Eckenlinie und dem Gesichtspunkt auf einer Geraden liegt.

Übungsaufgaben.

I.

Aufgaben zum ersten Kapitel.

Bemerkung. Die Zeichenaufgaben des körperlichen Raumes erfordern das Legen von Ebenen durch die sie bestimmenden Stücke ebenso wie die der ebenen Geometrie das Ziehen von Geraden. In jenen Hilfsebenen sind die Aufgaben auf solche der ebenen Geometrie zurückzuführen.

§ 1.

1. Man soll durch einen Punkt eine Gerade legen, welche mit einer gegebenen Geraden a) einen gegebenen Winkel bildet, b) parallel ist.

2. Man soll durch einen Punkt aufser einer Ebene eine zu letzterer parallele Gerade ziehen. Wie viele Lösungen?

3. Durch a) einen Punkt, b) eine Gerade soll eine Ebene parallel zu einer gegebenen Geraden gelegt werden.

4. Sind Gerade, die einer Ebene parallel sind, einander parallel?

5. Man bestimme die Lage aller durch einen Punkt gehenden und a) zu einer Ebene parallelen Geraden, b) zu einer Geraden parallelen Ebenen.

6. Gegeben seien zwei windschiefe Gerade g_1 und g_2. Man soll bestimmen:

a) durch g_1 eine mit g_2 parallele Gerade;

b) durch g_1 die mit g_2 parallele Ebene;

c) durch einen gegebenen Punkt die zu g_1 und g_2 parallele Ebene;

d) durch einen gegebenen Punkt die g_1 und g_2 schneidende Gerade;

e) eine g_1 und g_2 schneidende Gerade, welche einer gegebenen Geraden l parallel ist;

f) eine g_1 und g_2 schneidende Gerade, welche einer gegebenen Ebene λ parallel ist.

7. Wenn man durch jede von zwei windschiefen Geraden a und b die zur andern parallele Ebene α und β legt, so ist $\alpha \parallel \beta$; Beweis?

8. Man soll die Gerade bestimmen, welche drei windschiefe Gerade schneidet und zwar die eine in einem gegebenen Punkt.

§ 2. **9.** Es soll der Ort aller Punkte angegeben werden, von welchen aus die parallel einer gegebenen Geraden nach einer Ebene gezogenen Strecken einander gleich sind.

10. Zwei Ebenen sind parallel, wenn sie von drei nicht in einer Ebene liegenden parallelen Geraden gleiche Stücke ausschneiden.

11. Drei parallele Ebenen schneiden aus zwei Geraden Strecken von gleichem Verhältnis aus.

12. Man soll von einem windschiefen Viereck, d. i. von einem solchen, dessen Ecken nicht in derselben Ebene liegen, die folgenden Sätze beweisen:

a) Die Mitten der vier Seiten liegen in einer Ebene und bestimmen ein Parallelogramm.

b) Die Verbindungsgeraden der Mitten der Gegenseiten und der Eckenlinien gehen durch einen Punkt und halbieren einander in demselben.

c) Zwei Gegenseiten eines einbeschriebenen ebenen Vierecks schneiden einander auf einer Eckenlinie des windschiefen.

§ 3 u. 4. **13.** Wenn eine von zwei parallelen Ebenen zu einer dritten Ebene senkrecht ist, so ist es auch die andere.

14. Wenn eine von zwei parallelen Geraden zu einer Ebene senkrecht ist, so ist es auch die andere.

15. Wenn eine von zwei parallelen Ebenen zu einer Geraden senkrecht ist, so ist es auch die andere.

16. Wenn eine Gerade und eine Ebene aufser ihr senkrecht zu einer Geraden sind, so sind erstere parallel.

17. Wenn eine Ebene und eine Gerade aufser ihr senkrecht zu einer Ebene sind, so sind erstere parallel.

18. Wenn von zwei Strahlen der eine parallel, der andere senkrecht zu einer Ebene ist, so sind sie unter einander senkrecht.

19. Wenn von zwei Ebenen die eine parallel, die andere senkrecht zu einer Geraden ist, so sind sie unter einander senkrecht.

§ 5. **20.** Man soll durch einen Punkt, welcher a) auf, b) aufser einer Geraden liegt, die zur Geraden senkrechte Ebene legen.

21. Man soll durch einen in der Ebene α liegenden Punkt P eine zur Ebene senkrechte a) Ebene, b) Gerade bestimmen. (Anwendung von S. 12, 3 Zusatz.)

22. Dieselben Aufgaben wie 21, wenn P aufserhalb α liegt. — Andeutung: a) Fälle die Senkrechte von P auf eine Gerade a in α. b) Löse zuerst a).

23. Durch a) eine gegebene Gerade, b) einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche mit einer gegebenen Ebene einen gegebenen Winkel bildet.

24. Es soll in einer Ebene a) durch einen ihrer Punkte, b) parallel einer Geraden eine Gerade x so gezogen werden, dafs sie

von α) einem Punkte aufser der Ebene den gegebenen Abstand r, [§ 5.] β) zwei Punkten aufser der Ebene die gegebenen Abstände r und s hat.

25. Man soll eine Ebene bestimmen, welche:

a) durch eine Gerade geht und von einem gegebenen Punkt gegebenen Abstand hat;

b) durch einen Punkt geht und von einer gegebenen Geraden gegebenen Abstand hat;

c) durch einen Punkt geht und von drei gegebenen nicht auf einer Geraden liegenden Punkten gleichweit absteht.

26. Alle Strecken, welche von Punkten einer Geraden aus auf eine zu ihr parallele Ebene senkrecht gefällt werden, sind gleichgrofs.

27. Welches ist der Ort aller Punkte, die von einer Ebene eine gegebene Entfernung haben?

28. Man soll den Ort aller Punkte angeben, welche von zwei a) parallelen, b) nicht parallelen Ebenen α) den gleichen, β) je gegebenen Abstand, γ) gegebenes Verhältnis der Abstände haben.

29. Wie weit ist ein Punkt P von einer Ebene α entfernt, wenn seine Entfernung von einem Punkte A der Ebene $= a$ und wenn die Entfernung $AF = r$ bekannt ist, wobei F der Grundrifs von P auf α ist? — Beispiele: $a = 5$, $r = 3$; $a = 42{,}7$, $r = 7{,}7$.

30. Die Abstände zweier Punkte A und B von einer Ebene seien a und b, der Abstand ihrer Grundrisse auf der Ebene sei c. Wie grofs ist AB? — Beispiele: $a = 17$, $b = 28$, $c = 60$; $a = 87$, $b = 15$, $c = 65$; $a = 1{,}3$, $b = 4\frac{3}{4}$, $c = 1{,}52$.

31. Wie weit ist ein Punkt von der Ebene eines regelmäfsigen Dreiecks (Vierecks) entfernt, wenn sein Abstand von jeder Ecke desselben gleich der Seite ($= a$) ist?

32. Im Mittelpunkt eines regelmäfsigen Dreiecks (Vierecks), dessen Seite $= a$, sei die zu dessen Ebene senkrechte Strecke $= a$ gezogen. Wie weit ist der Endpunkt der Strecke von den Ecken entfernt?

33. Ein Dreieck habe die Seiten 104, 112, 120. Wie weit ist ein Punkt von seiner Ebene entfernt, wenn sein Abstand von jeder Ecke 169 beträgt? — Antw. $= 156$.

34. Wird durch den Mittelpunkt eines Kreises eine zu seiner Ebene schiefe Gerade gelegt, so hat ein beliebiger Punkt der Geraden von den Kreispunkten verschieden grofse Entfernungen. Von welchem Punkte aus ist diese Entfernung am gröfsten? am kleinsten? von welchen beiden Punkten ist die Entfernung je die gleiche?

35. Sind zwei Ebenen senkrecht zu je einer von zwei windschiefen Geraden, so ist ihre Schnittgerade parallel zur kürzesten Entfernung beider Windschiefen.

36. a) Wenn eine Strecke s zwei windschiefe Gerade a und b unter gleichen Winkeln schneidet, so liegen die Schnittpunkte gleich-

[§ 5.] weit entfernt von den Fuſspunkten der kürzesten Entfernung beider Geraden. Beweis? — Andeutung: Lege durch a die Ebene $\alpha \parallel b$ und ziehe in α durch Punkt (as) die Parallele zu b.

b) Man soll zwischen zwei windschiefe Gerade a und b eine gegebene Strecke s so eintragen, daſs sie mit a und b gleiche Winkel bildet. — Andeutung: Benutze Satz a).

37. Man soll in einer gegebenen Ebene einen Punkt finden, der von zwei gegebenen a) Punkten oder b) Ebenen je gegebene Entfernungen hat.

38. Durch einen Punkt soll eine Ebene gelegt werden, die mit einer Geraden einen gegebenen Neigungswinkel hat.

39. Durch einen Punkt, der a) in, b) auſser einer Ebene liegt, soll eine Gerade gezogen werden, so daſs der Neigungswinkel eine gegebene Gröſse hat.

40. Wird durch die Halbierungsgerade eines Winkels (oder seines Nebenwinkels) eine Ebene gelegt, so bilden mit dieser Ebene die Schenkel des Winkels gleiche Winkel, und ihre Grundrisse auf der Ebene bilden mit jener Halbierungsgeraden gleiche Winkel.

41. Die Halbierungsgerade eines Winkels hat zum Grundriſs auf einer Ebene, die zu ihr (oder zur Halbierungsgeraden des Nebenwinkels) parallel ist, die Halbierende des Grundrisses des Winkels.

42. Wenn die von zwei Punkten A und B aus nach einer Ebene unter gleichen Neigungswinkeln gezogenen Strecken gleich sind, was läſst sich von A und B behaupten? — Umkehrungen?

43. Wie weit steht eine Ebene von einem Punkte ab, wenn eine von letzterem aus zur Ebene gezogene schiefe Strecke die Länge a hat und den Neigungswinkel von 30^0 (60^0, 45^0) bildet?

44. Wenn in Fig. 14 (S. 12) FB der Grundriſs von FA ist, und wenn $BFA = 45^0$ (30^0) und $\sphericalangle BFX = 45^0$ (60^0) ist, welche Gröſse hat $\sphericalangle AFX$?

45. Eine Wegstrecke von 2 km Länge sei gegen die wagrechte Ebene um $2^0\ 20'$ geneigt; wie groſs ist ihr Grundriſs auf letzterer?

46. Welchen Winkel bildet die Gerade AB in Nr. 30 mit der Ebene?

47. Ein Weg bestehe aus drei Strecken AB, BC, CD, die das Gröſsenverhältnis $2:1:3$ haben und gegen die wagrechte Ebene um $5^0\ 26'$, $3^0\ 40'$, $173\frac{1}{2}^0$ geneigt sind; der gesamte Grundriſs auf der genannten Ebene betrage 6 km 783 m. Wie lang sind die einzelnen Strecken?

48. Ein Punkt P und auſser ihm eine Ebene ε seien gegeben. Man soll durch P nach ε eine Strecke von a) bekannter Länge l, b) bekanntem Neigungswinkel λ ziehen, welche einer zugleich gegebenen Ebene ε' parallel ist.

49. Man soll zwischen eine Gerade und eine Ebene eine ge-

gebene Strecke so eintragen, daſs sie parallel einer gegebenen Ebene wird und mit der gegebenen a) Ebene, b) Geraden einen gegebenen Winkel bildet. [§ 5.]

50. Die Grundrisse aller Durchmesser eines Kreises werden durch den Grundriſs des Mittelpunktes halbiert. Welcher Durchmesser hat den gröſsten Grundriſs? welcher den kleinsten? welche haben gleiche Grundrisse?

51. Die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks δ liege in einer Ebene ε, und die Neigungswinkel seiner Katheten gegen ε seien α und β. Wie groſs ist $\sphericalangle\,(\delta\varepsilon)$? — Beispiel: $\alpha = 20^0$, $\beta = 25^0$. Andeutung: Drücke die fraglichen Strecken in der Hypotenuse c und den Winkeln α und β aus.

52. Zwischen zwei parallelen Ebenen im Abstand a seien zwei schiefe Strecken gezogen, deren Längen das Verhältnis $3:5$ und deren Neigungswinkel mit einer der Ebenen das Verhältnis $= 2:1$ haben. Welche Länge haben beide Strecken? — Beispiel: $a = \frac{5}{6}\sqrt{11}$.

53. Ein ebener bergangehender Weinberg zeige in einem Plan die Gröſse von 22 a 8 qm; sein Neigungswinkel gegen die wagrechte Ebene ist $= 14^0\ 50'$. Welches ist seine wirkliche (nutzbringende?) Fläche?

II.

Aufgaben zum zweiten Kapitel.

Im Folgenden sind unter „Kegel" und „Cylinder" nur Umdrehungsflächen zu verstehen.

1. a) Welche Gröſsenbeziehungen finden statt zwischen dem Halbmesser r einer Kugel, dem Mittelpunktsabstand a einer die Kugel schneidenden Ebene, dem Halbmesser ϱ des Schnittkreises und dem Winkel φ, den ein nach dem Schnittkreise gehender Kugelhalbmesser mit dessen Ebene bildet? § 7.

b) Wie viele der in a) genannten Gröſsen r, a, ϱ, φ bestimmen die übrigen?

2. Man soll die fehlenden der in 1 genannten Gröſsen r, a, ϱ, φ berechnen, wenn bekannt ist:

a) $r = 53$, $a = 28$; c) $a = 7{,}2$, $\varphi = 47^0\ 55'$;
b) $r = 130$, $\varphi = 14^0\ 15'$; d) $\varrho = 5{,}8$, $\varphi = 86^0\ 3'$.

3. Legt man durch zwei Kugeln mit gemeinsamem Mittelpunkt irgend welche Ebenen, so hat der zwischen beiden Schnittkreisen liegende Kreisring stets den gleichen Inhalt.

[§ 7.] **4.** Wie grofs ist der Halbmesser eines Parallelkreises der Erde, dessen geographische Breite β bekannt ist, wenn der Erdumfang $= 40\,000$ km ist? — Beispiel: $\beta = 49^0\,25'$.

5. Welche Länge hätte ein in 50^0 geographischer Breite rings um die Erde gespannter Telegraphendraht?

6. a) Welche Länge hätte die Pacificbahn, wenn sie durchweg in 40^0 geographischer Breite vom Meridian von New-York (74^0 w. v. Gr.) bis zu dem von San Francisco (122^0 w. v. Gr.) ginge? —

b) Wenn Montevideo und Kapstadt genau unter derselben Breite von 35^0 lägen, wie grofs wäre der Parallelkreisbogen zwischen beiden Orten, da sie einen Zeitunterschied von 5 Stunden haben?

c) In welcher gemeinschaftlichen geographischen Breite liegen zwei Punkte, zwischen denen der Parallelkreisbogen 750 g. Meilen und der Zeitunterschied 6 Stunden 25 Minuten beträgt? [Erdhalbmesser $= 860$ g. Meilen.]

d) Die geographische Länge und Breite von Kairo und New-Orleans sollen aus Karten bestimmt werden; dann soll die Länge des Parallelkreisbogens zwischen beiden Orten in deutschen Seemeilen angegeben werden. (Die Länge der letzteren entspricht einer Bogenminute des Meridiankreises der Erdkugel.)

e) Der Mittelpunktwinkel der Erdhalbmesser der beiden Orte (in a bis d) soll bestimmt werden und hierauf der kürzeste Abstand der beiden Orte auf der Kugel.

7. Welche Lage haben die Mittelpunkte aller parallelen Schnittkreise einer Kugel?

8. Welches ist der Ort der Mitten aller Kugelschnittkreise von gleicher Gröfse?

9. An eine gegebene Kugel soll die berührende Gerade und Ebene gelegt werden, die a) durch einen Punkt der Kugel geht, b) durch einen Punkt aufser der Kugel geht, c) durch eine gegebene Gerade geht, d) parallel einer gegebenen Ebene ist, e) parallel einer gegebenen Geraden ist und durch einen gegebenen Punkt geht, f) mit einer gegebenen Ebene (oder Geraden) einen gegebenen Winkel bildet.

10. An einer körperlichen Kugel soll man:

a) für einen auf ihr gezeichneten Kreis den Halbmesser ϱ finden;

b) ihren eigenen Halbmesser finden;

c) durch zwei auf ihr gegebene Punkte den Hauptkreis legen.

Andeutung. a) Messe die Sehnen dreier Punkte mit dem Zirkel und übertrage das Dreieck in die Ebene. — b) Zeichne mit der Zirkelöffnung s auf der Kugel irgend einen Kreis und benutze a). — c) Benutze wie in b) die Sehne des Viertels eines Hauptkreises.

11. Welches ist der Ort aller Punkte, deren Verbindungsgeraden mit zwei festen Punkten einen rechten Winkel einschliefsen?

12. Unter der Entfernung eines Punktes von der Kugelober-

fläche versteht man die Strahlstrecken nach dem nächsten Punkt der Fläche. Welches ist dieser? und welches ist der entfernteste? [§ 7.]

13. Welches ist der Ort aller Punkte, deren Abstände von einer Kugel gleich einer gegebenen Strecke sind?

14. Welches ist der Ort a) aller Punkte, b) aller Geraden, c) aller Ebenen (d. h. welche Fläche wird von allen Ebenen berührt), die von einer gegebenen Geraden einen gegebenen Abstand haben? § 9.

15. Welches ist der Ort aller Schnittgeraden je zweier Ebenen, die durch zwei feste parallele Gerade gehen und einen gegebenen Winkel mit einander bilden?

16. Der Halbmesser eines Cylinders sei r, der Abstand seiner Axe von einer ihr parallelen Ebene $= a$ $(< r)$. Wie grofs ist der Abstand zwischen beiden Schnittgeraden der Ebene und des Cylinders?

17. In welchem Abstand von der Axe schneiden einander die Ebenen, die den Cylinder in beiden Schnittgeraden (Nr. 16) berühren?

18. Kann eine Ebene als Umdrehungsfläche aufgefafst werden?

19. Ein Kegel sei bestimmt a) durch seinen Axenschnittwinkel, b) durch einen Schnittkreis mit dem Halbmesser r und dem Abstand h seiner Spitze von dessen Ebene. Man soll den Abstand eines Kreisschnittes von der Spitze bestimmen, wenn der Halbmesser des Kreisschnittes ϱ ist.

20. In einem Kegel, für welchen das Verhältnis v des Halbmessers eines Schnittkreises und des Abstandes desselben von der Spitze gegeben ist, soll der Winkel zwischen Seitengerade und Kreisebene berechnet werden. Beispiel: $v = 0{,}6$.

21. In einem Kegel sei der Winkel der Axe mit einer Seitengerade $= \alpha$, mit einer Ebene durch den Scheitel $= \beta$ $(< \alpha)$. Wie grofs ist der Winkel der beiden Schnittgeraden der Ebene und der Kegelfläche?

22. Man soll an eine gegebene Kegel- oder Cylinderfläche eine berührende Ebene legen, welche a) durch einen auf der Fläche gegebenen Punkt geht; b) durch einen aufserhalb gegebenen Punkt geht, c) parallel einer gegebenen Geraden ist.

23. Welches ist der Ort aller Ebenen, d. h. welche Fläche wird von jeder Ebene berührt, die a) parallel der Axe eines Cylinders ist und diesen in zwei Geraden von gegebenem Abstande schneidet? b) durch die Spitze eines Kegels geht und diesen in einem Zweistrahl von gegebenem Winkel schneidet?

24. Welches ist der Ort der Geraden (oder Ebenen), welche a) einer gegebenen Geraden parallel sind und von ihr einen gegebenen Abstand haben? b) eine gegebene Gerade in bestimmtem Punkte unter gegebenem Winkel schneiden? c) durch einen gegebenen Punkt gehen und eine gegebene Ebene unter gegebenem Winkel schneiden?

[§ 9.] **25.** Gegeben sei eine Kugel und innerhalb derselben ein Punkt. Man soll den geometrischen Ort der Kugelsehnen bestimmen, die durch den Punkt halbiert werden. Wie heifst die entsprechende Aufgabe, wenn der gegebene Punkt aufser der Kugel liegt?

26. Gehen von beliebigen Punkten einer Geraden aus Berührungskegel an eine Kugel, so schneiden deren Berührungskreise alle einander in zwei festen Punkten. Wo liegen diese?

27. Geht die Axe eines Cylinders oder Kegels durch die Mitte einer Kugel, so sind die Schnittfiguren zur Axe senkrechte Kreise.

28. Einem Kegel soll eine Kugel einbeschrieben werden, die einen gegebenen Halbmesser hat und zugleich a) eine die Axe schneidende Gerade berührt, b) eine gegebene Ebene berührt, c) eine den Kegel berührende Kugel berührt.

29. Zwei Kugeln seien durch ihre Mittelpunktsentfernung d und ihre Halbmesser r_1 und r_2 bestimmt. Wo liegen die Mittelpunkte der die beiden Kugeln berührenden Kegelflächen? und welches sind die Winkel der Axenschnitte? Beispiel: $d = 25$, $r_1 = 12$, $r_2 = 5$ mm.

30. Man soll den Ort der Mittelpunkte aller Kugeln von gegebenem Halbmesser bestimmen, welche a) eines der Elemente Punkt, Gerade, Ebene, Kugel berühren, b) aus einer gegebenen Geraden (oder Ebene oder Kugel) eine Strecke (einen gegebenen Kreis) ausschneiden, c) zwei parallele Gerade berühren.

31. Man soll eine Kugel mit gegebenem Halbmesser bestimmen, die irgend drei der folgenden Bedingungen erfüllt: sie soll a) durch einen gegebenen Punkt gehen, b) eine gegebene Ebene berühren, c) eine gegebene Kugel berühren, d) aus einer gegebenen Ebene einen gegebenen Kreis ausschneiden, e) aus einer gegebenen Kugel einen gegebenen Kreis ausschneiden.

32. Man soll den Mittelpunkt einer Kugel finden, die eine Ebene und eine Kugel und zwar erstere (oder letztere) in gegebenem Punkte berührt.

33. Welches sind die Bedingungen dafür, dafs zwei Kugeln einander ganz aus- oder ganz einschliefsen, berühren oder schneiden?

§ 10. **34.** Der Axenschnittwinkel einer Umdrehungskegelfläche sei 2α; sie werde von einer Ebene durchschnitten, welche die Axe in der Entfernung a von der Spitze schneidet und mit der Axe den Winkel β bildet. Wie grofs ist die Hauptaxe des entsprechenden Kegelschnittes?

35. In einen Kegel, dessen Axenschnittwinkel $= 2\alpha$ sei, werden auf a) derselben Seite, b) verschiedenen Seiten des Mittelpunktes zwei berührende Kugeln einbeschrieben, deren Halbmesser r_1 und r_2 $(r_1 < r_2)$ seien. Welchen Axenschnittwinkel hat der zweite die beiden Kugeln berührende Kegel? — Beispiel: $2\alpha = 39^0\,35'$; $r_1 = \frac{5}{2}$, $r_2 = 10$ mm.

36. a) Welche Gröfse hat die Hauptaxe des Ellipsenschnittes eines Kegels, wenn die beiden die Schnittebene und den Kegel berührenden Kugeln die Halbmesser r_1 (= 5 mm) und r_2 (= 16 mm) haben und wenn der Axenschnittwinkel des Kegels 2α ($= 43^0\,24'$) ist? [§ 10.]

b) Wo liegen Brennpunkt und Leitgerade des Parabelschnittes an einem Kegel, dessen Axenschnitt den Winkel 51^0 hat, wenn der Scheitel der Kurve um 21 mm von der Kegelspitze absteht?

c) Wie grofs ist der Asymptotenwinkel eines Hyperbelschnittes, wenn der Winkel des Hauptaxenschnittes 2α und der Neigungswinkel zwischen der Axe des Kegels und der Schnittebene β ist? — Beispiel: 1) $2\alpha = 120^0$, $\beta = 45^0$; 2) $2\alpha = 80^0$, $\beta = 23^0$.

37. Die Verbindungsstrecke zweier Punkte, die auf verschiedenen Seiten einer Ebene und gleichweit von derselben entfernt liegen, wird durch die Ebene halbiert. § 11.

38. Welches ist der geometrische Ort des Punktes, welcher von drei durch einen Punkt gehenden Ebenen gleichweit entfernt ist?

39. Jeder durch den Scheitel eines Winkels gehende Strahl, der mit beiden Schenkeln gleiche Winkel einschliefst, liegt in der den Winkel senkrecht halbierenden Ebene.

40. Welches ist der Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, die a) durch zwei gegebene Punkte gehen? b) zwei Gerade berühren? c) zwei Ebenen, insbesondere zwei parallele Ebenen berühren?

41. Welches ist der Ort der Mittelpunkte der Kugeln, welche a) durch die Ecken eines Dreiecks gehen? b) die Seiten eines Dreiseits berühren?

42. Giebt es einen Punkt, der gleichweit entfernt ist von vier nicht a) in einer Ebene liegenden Punkten? b) durch einen Punkt gehenden Ebenen?

43. Es ist der Mittelpunkt einer Kugel zu bestimmen, die a) durch vier nicht in einer Ebene liegende Punkte geht; b) durch einen Kreis und einen Punkt aufser seiner Ebene geht; c) durch einen Kreis geht und eine Gerade aufser seiner Ebene berührt.

44. Giebt es einen Punkt, der von den vier Seiten eines windschiefen Vierecks gleichweit entfernt ist?

45. Um welche Axe ist die Ebene eines Winkels bei festbleibendem Scheitel zu drehen, damit nach der Bewegung jeder Schenkel fällt auf: a) den andern Schenkel? b) den eigenen Gegenstrahl? c) den Gegenstrahl des andern Schenkels? § 12.

46. Es sind die Bedingungen der gegengesetzten Lage zweier Kugeln, Cylinder oder Kegel anzugeben in Bezug auf a) einen Mittelpunkt, b) eine Mittelgerade und c) eine Mittelebene.

III.

Aufgaben zum dritten Kapitel.

§ 13 u. 14. **1.** Man soll ein gleichschenkeliges Dreikant (mittels des sog. Netzes) herstellen, von welchem:

a) die gleichen Kantenwinkel $= 70^0$ und der ungleiche Kantenwinkel $= 100^0$;

b) der ungleiche Kantenwinkel $= 44^0$ und der Neigungswinkel der Kante, in welcher die gleichen Seiten zusammenstofsen, mit der Gegenseite $= 32^0$ ist.

2. Man soll das Netz eines Dreikants zeichnen und das Dreikant selbst herstellen, wenn gegeben sind:

a) die drei Kantenwinkel $a = 37^0$, $b = 59^0$, $c = 47^0$;

b) zwei Kantenwinkel und der eingeschlossene Flächenwinkel $a = 78^0$, $b = 60^0$, $\gamma = 117^0$;

c) zwei Kantenwinkel und der eine Gegenflächenwinkel $a = 75^0$, $b = 73^0$, $\alpha = 77^0$;

d) ein Kantenwinkel und zwei anliegende Flächenwinkel $a = 52^0$, $\beta = 64^0$, $\gamma = 55^0$.

3. In jedem Dreikant gehen je durch eine Gerade die

a) Ebenen, die die Kantenwinkel senkrecht halbieren;

b) Höhenebenen, d. h. die durch je eine Kante senkrecht zur Gegenseite gelegten Ebenen;

c) Schwerebenen, d. h. die durch je eine Kante und die Winkelhalbierende der Gegenseite gelegten Ebenen;

d) winkelhalbierenden Ebenen. Welche Ausdehnung läfst d) zu, wenn auch die Nebenwinkel in Betracht gezogen werden?

4. Wie erhält man die Axe eines Umdrehungskegels, der einem Dreikant a) umbeschrieben, b) einbeschrieben ist?

5. Wie läfst sich der Satz vom Vorhandensein eines Mittelpunktes der Ecken und Seiten eines regelmäfsigen Vielecks ausdehnen auf das regelmäfsige Vielkant oder Vielflach?

6. Wenn zwei Kanten eines Dreikants mit zweien eines andern zusammenfallen, die dritte Kante des einen aber innerhalb des andern fällt, so ist die Summe der Kantenwinkel des umschliefsenden Dreikants gröfser als die des umschlossenen. Beweis!

7. Zieht man innerhalb eines Dreikants durch dessen Scheitel eine Gerade, so ist die Summe der Winkel, welche sie mit den drei Kanten bildet, kleiner als die Summe der Kantenwinkel des Dreikants.

8. Zu gleichen geradlinigen Entfernungen zweier Kugelpunkte gehören auch gleiche oder zu einem Hauptkreis einander ergänzende Abstände auf der Kugelfläche — und umgekehrt.

9. Die Summe zweier Flächenwinkel im Dreikant übertrifft den dritten Flächenwinkel um weniger als $2R$. Beweis! [§ 13 u. 14.]

10. Die Summe zweier Kantenwinkel eines Dreikants und die Summe der gegenüberliegenden Ebenenwinkel sind beide entweder $> 2R$ oder beide $< 2R$ oder beide $2R$. (Man nehme die Ecke aus zwei der Kanten und dem Gegenstrahl der dritten Kante zu Hilfe.)

11. Die in § 40 und 41 des ersten Teiles gegebenen Sätze über das Vieleck mit Mittelpunkt und Mittellinie und über das regelmäſsige Vieleck sollen auf das Vielkant mit Mittellinie und Mittelebene und das regelmäſsige Vielkant übertragen werden.

12. Durch wie viele und welche Stücke ist ein Kugeldreieck bestimmt?

13. Welche Übereinstimmung und welcher Unterschied findet statt zwischen den Bedingungen der Deckungsfähigkeit von ebenen Dreiecken und von Kugeldreiecken?

14. a) Wenn die geographische Breite von Porto und New-York 41^0 und ihr Längenunterschied 65^0 beträgt, α) um wie viele Seemeilen (vgl. S. 142, Aufg. II, 6 d) übertrifft der Parallelkreisbogen zwischen beiden Orten ihren kürzesten Abstand auf der Kugel? β) bis zu welcher höchsten Breite muſs ein Schiff gegen Norden fahren, um auf dem Hauptkreis der Kugel beider Orte zu bleiben? γ) unter welchem Winkel gegen den Meridian muſs es abfahren? § 17.

b) Die Aufgaben S. 142, II, 6 e sollen durch Sätze vom rechtwinkeligen Kugeldreieck gelöst werden.

15. a) Wie groſs ist jeder Winkel eines Kugeldreiecks, dessen Seiten alle 60^0 sind?

b) Was würde sich aus der cos-Formel des Winkels für die Seiten eines Kugeldreiecks ergeben, dessen Winkel alle $= 60^0$ wären?

16. Die Entfernungen zwischen folgenden Orten sollen bestimmt werden, wobei der Erdhalbmesser $= 6370$ km angenommen wird.

Ort:	Geogr. Breite:	Länge von Berlin in Zeit: h	min	sec
Berlin:	$+ 52^0 30{,}3'$	0	0	0
Paris:	$+ 48^0 50{,}2'$	+ 0	44	14
Wien:	$+ 48^0 12{,}6'$	− 0	11	56
Greenwich:	$+ 51^0 28{,}6'$	+ 0	53	35
Petersburg:	$+ 59^0 56{,}5'$	− 1	7	39
New-York:	$+ 40^0 52{,}7'$	+ 5	49	31
Sydney:	$- 33^0 51{,}7'$	− 9	11	25.

17. Der wievielte Teil des Erdumfangs ist der Bogen von Altkirch in Elsaſs ($\varphi_1 = 47^0\,37'$, $\lambda_1 = 7^0\,51'$) bis Memel ($\varphi_2 = 55^0\,48'$, $\lambda_2 = 21^0\,9'$)?

18. Wie weit ist der kürzeste Seeweg von Catania ($\varphi_1 = 37^0\,30'$,

[§ 17.] $\lambda_1 = 12^0\,40'$) nach Alexandria ($\varphi_2 = 31^0\,13'$, $\lambda_2 = 33^0\,8'$), wenn auf jeden Grad 15 geographische Meilen kommen?

19. Wie viele Tage braucht ein Schiff von Cadiz ($\varphi_1 = 36^0\,16'$, $\lambda_1 = -6^0\,18'$) nach Habanna ($\varphi_2 = 23^0\,5'$, $\lambda_2 = -82^0\,10'$) auf der kürzesten Linie bei 15 Knoten Fahrt, d. h. wenn es 15′ des gröfsten Kreises in einer Stunde macht?

20. Unter welchem Winkel gegen den Meridian mufs ein Schiff abfahren, um in kürzester Linie von Nizza ($\varphi_1 = 43^0\,40'$, $\lambda_1 = +4^0\,55'$) nach Algier ($\varphi_2 = 36^0\,45'$, $\lambda_2 = +0^0\,45'$) zu kommen?

21. Ein Schiff lief von Madeira ($\varphi = 32^0\,45'$, $\lambda = 17^0$ westlich von Greenwich) in der Richtung nach Südsüdwest ab mit 9 Knoten Fahrt, d. h. indem es stündlich 9 Seemeilen auf einem Hauptkreis zurücklegte. Welches war der Ort des Schiffes nach 3 Tagen? — [Eine Seemeile ist die Länge einer Bogenminute des Meridiankreises.]

22. Ein Schiff fährt von Brest ($\varphi = 48^0\,30'$, $\lambda = 6^0\,40'$ w. v. Paris) nach Westindien und erreicht, nachdem es einen Bogen von 3899 km zurückgelegt hat, eine geographische Breite von 34^0. Welches ist die geographische Länge des Schiffes in diesem Augenblick? (Erdhalbmesser = 6370 km.)

23. Es ist die Höhe h eines Sternes über dem Horizont gemessen und das Azimut a, d. h. der Winkel der Ebene des Höhenkreises mit der Meridianebene. Die geographische Breite des Ortes sei φ, also der Winkel zwischen den Geraden nach dem Pol und dem Zenith $= (90^0 - \varphi)$. Aus dem Kugeldreieck „Pol P, Zenith Z und Stern S“ ist der Polabstand PS $(= p)$ des Sterns oder dessen Äquatorabstand oder Deklination $d = (90^0 - p)$ zu berechnen.

24. Pol P, Zenith Z und Sonne S bestimmen ein Kugeldreieck, in welchem aus dem Winkel s am Pol die Zahl der Stunden sich ergiebt bis zur Stellung der Sonne im Meridian, d. i. bis zum wahren Mittag, indem jeder Stunde 15^0 entsprechen. Am 14. Juni 1883 wurde in Heidelberg ($\varphi = 49^0\,24'\,47''$) morgens um $8^h\,50^{min}$ der Zenithabstand des oberen Sonnenrandes $= 44^0\,58'\,0''$ gemessen, wozu noch $55''$ wegen der Lichtbrechung und $15'\,47''$ für den Halbmesser der Sonne kommen, um den Zenithabstand z der Sonnenmitte zu erhalten. Das nautische Jahrbuch giebt für diese Zeit die Deklination der Sonne $d = 23^0\,15'\,44''$. Von der zu berechnenden (wahren) Uhrzeit sind nach diesem Jahrbuch 7^{sec} abzuzählen, um für den betr. Tag die mittlere Uhrzeit zu erhalten. — Zur Kontrole wurde eine zweite Messung gemacht um $8^h\,57^{min}$, wobei sich für die betreffenden Zahlen der Reihe nach ergab: $43^0\,53'\,30''$, $53''$, $15'\,47''$, $23^0\,15'\,45''$. Um wieviel Sekunden war die benutzte Uhr zu richten?

25. Es ist für einen Ort von gegebener geographischer Breite (s. Aufg. 16) die Dauer des längsten und kürzesten Tages zu berechnen, wenn man annimmt, dafs die Deklination der Sonne hierbei

$+23^0 37'$ und die Sonnenmitte wegen der Strahlenbrechung dann am Horizont erscheint, wenn ihr Mittelpunkt $35'$ unter dem Horizont ist. [§ 17.]

26. Für dieselbe geographische Breite und dieselben Tage ist die Dauer der Dämmerung zu bestimmen, wenn diese durch den Augenblick begrenzt ist, da die Sonne 18^0 unter dem Horizont ist.

27. Aus der Uhrzeit der Beobachtung (t^h vor Mittag), dem Zenithabstand z und der Deklination d der Sonne soll die geographische Breite des Beobachtungsortes bestimmt werden.

28. Aus den Zenithabständen z und z_1 eines Sternes zu verschiedenen Zeiten (vor der Kulmination), dem Zeitunterschied beider Beobachtungen t^h (Sternzeit) und der Deklination des Sternes d soll die geographische Breite des Beobachtungsortes bestimmt werden. (Die Stellungen S und S_1 des Sternes und der Pol P bestimmen ein Kugeldreieck, in welchem $PS = PS_1 = 90^0 - d$ und $\sphericalangle P$ durch t gegeben ist. Man berechne hieraus SS_1 und $\sphericalangle ZSP$; ferner aus dem Dreieck SS_1Z (wobei Z das Zenith sei), in welchem nun alle Seiten bekannt sind, $\sphericalangle ZSS_1$; schliefslich im $\triangle ZPP_1$ aus $\sphericalangle ZSP = PSS_1 + ZSS_1$ und aus z, d die Gröfse $ZP = (90^0 - \varphi)$.

(Siehe auch die Aufgaben S. 159: 14, 15 u. 16.)

IV.

Aufgaben zur Parallelbestrahlung, zu Prismen und Cylindern

(Oberflächen.)

1. Bei der Abbildung durch parallele Bestrahlung auf irgend einer Ebene a) sind die Bilder paralleler Geraden parallel; b) bleibt das Teilverhältnis einer Strecke unverändert. § 18.

2. Im Bilde paralleler Bestrahlung

a) einer Figur mit einem Mittelpunkt ist das Bild dieses Punktes Mittelpunkt des Bildes;

b) einer Figur mit einer Mittellinie halbiert das Bild dieser Geraden die (untereinander parallelen) Strecken der Bilder beiderseits gleichliegender Punkte (schiefe Symmetrie).

3. Eine ebene Figur und ihr durch Parallelstrahlung erzeugtes Bild auf einer zweiten Ebene bleiben in paralleler Bestrahlung bei der Drehung der Bildebene um die Schnittgerade (Bildaxe) beider Ebenen. (Andeutung: Sind A_1B_1 die Bilder von AB, K der Schnittpunkt von AB und A_1B_1 mit der Axe, so bleibt bei der Drehung $AK : BK = A_1K : B_1K$.)

4. Zu jeder ebenen Figur läfst sich in dieser Ebene ein Bild paralleler Bestrahlung entwerfen für jede beliebige Gerade als Axe

[§ 18.] und einen beliebigen Punkt A_1 als Bild eines Punktes A der Figur (vgl. S. 78, § 31, 1—3).

5. Bei zwei Figuren in paralleler Bestrahlung (einer Ebene oder zweier sich schneidenden Ebenen) ist das Verhältnis der Abstände je eines Punktes und seines Bildes von der Bildaxe unveränderlich (ebenso das Verhältnis paralleler Strecken zwischen den Punkten und der Axe).

6. Bei zwei Figuren in paralleler Bestrahlung steht jede Fläche zur Fläche ihres Bildes in unveränderlichem Verhältnis, nämlich dem der Abstände entsprechender Punkte von der Axe. (Beweis durch Zerlegung wie in S. 13, 7).

7. In zwei parallel bestrahlten Figuren einer Ebene a) werden alle Parallelstrahlstrecken durch die Axe in gleichem Verhältnis geteilt; b) ist das Verhältnis entsprechender Flächen gleich dem dieser Strahlstrecken.

§ 19. **8.** Wie kann ein Prisma oder Cylinder durch Bewegung einer Fläche entstanden gedacht werden?

Prisma. **9.** Jede parallel einer Seitenkante eines Prismas durch dieses gelegte Ebene schneidet das Prisma in einem Parallelogramm.

10. Wie grofs ist in einem n seitigen Prisma die Summe der Flächenwinkel a) an den Grundkanten? b) an den Seitenkanten?

11. Von welcher Art ist ein Parallelflach, in welchem die beiden Ebenen durch die Eckenlinien einer Fläche und der gegenüberliegenden Fläche

a) zu einer dieser Flächen senkrecht sind?

b) Rechtecke (insbesondere übereinstimmende Rechtecke) sind?

12. Wenn in einem dreiseitigen Prisma zwei Grundkanten einander gleich sind und ebenso die Winkel, welche die Seitenkante im Scheitel dieser Grundkanten mit letzteren bildet, so ist die dieser Seitenkante gegenüberliegende Seitenfläche ein Rechteck (vgl. S. 12, 3, 4).

13. Es giebt Parallelflache, von deren Begrenzungsflächen nur zwei oder nur vier oder alle Rechtecke (Quadrate) sind.

14. Die vier Verbindungsgeraden der Gegenecken eines Parallelflaches gehen durch einen Punkt, ebenso die sechs Ebenen durch die Gegenseiten.

15. Das Parallelflach hat als Mittelpunkt a) die Mitte der Verbindungsstrecke zweier Gegenecken oder b) den Schnittpunkt der Verbindungsgeraden der Gegenecken.

16. In einem Parallelflach sind die gegenüberliegenden Dreikante gegenwendig gleich.

17. Der Quader hat als Mittelebenen die drei Mittelparallelebenen seiner Flächen, als Mittelgeraden die drei Senkrechten der Mitten der Seitenflächen, als Mittelpunkt den Schnittpunkt der Eckenlinien des Körpers.

18. In jedem Quader ist die Quadratsumme der [§ 19.]

a) von einer Ecke ausgehenden Kanten gleich dem Quadrat der Körper-Eckenlinien;

b) Cosinus derjenigen Winkel, welche diese Eckenlinie mit den Kanten bildet, gleich 1.

19. In welchem Gröfsenverhältnis stehen bei einem Würfel Seite, Eckenlinie der Fläche und Eckenlinie des Körpers?

20. Das Rhomboëder ist von sechs deckungsfähigen Rauten begrenzt.

21. Wir nennen die Eckpunkte eines Rhomboëders, in dem drei gleiche Kantenwinkel zusammentreffen, Pole, die Kanten desselben Polkanten, die übrigen Mittelkanten, die Verbindungsgerade beider Pole Hauptaxe. — Nun gelten die folgenden Sätze:

a) Das Rhomboëder hat als Mittelpunkt den Mittelpunkt der Hauptaxe (Aufg. 15).

b) Der Schnitt durch die Endpunkte der Kanten eines Pols ist ein regelmäfsiges Dreieck, zu dessen Ecken die Hauptaxe senkrecht ist im Mittelpunkt des Dreiecks.

c) Die senkrechte Ebene durch die Mitte der Hauptaxe halbiert die Mittelkanten.

d) Der Schnitt dieser Ebene ist ein regelmäfsiges Sechseck.

e) Die Verbindungsgeraden der Mitten je zweier gegenüberliegenden Mittelkanten, d. i. die Nebenaxen schneiden einander in der Mitte der Hauptaxe so, dafs sie mit dieser je einen R bilden, untereinander je $\frac{2}{3} R$.

f) Die Schnittebene durch zwei gegenüberliegende Mittelkanten ist ein Rechteck (S. 12, 4, vgl. Aufg. 12).

g) Eine Nebenaxe ist senkrecht zu den zugehörigen Mittelkanten, ebenso zur Eckenlinie der Ecken, welche aus den nichtzugehörigen Mittelkanten gebildet werden.

h) Das Rhomboëder hat als Mittellinie jede Nebenaxe.

22. Von einem Würfel sind der Mittelpunkt, die Mittelgeraden und die Mittelebenen zu bestimmen.

23. Wie grofs ist die Oberfläche eines Würfels, von welchem bekannt ist:

a) eine Kante a? $a = 4{,}7$ m (oder $a = 2$ dm 19 mm);

b) eine Eckenlinie der Fläche d? $d = 5 \cdot \sqrt{2}$ oder $d = 3\sqrt{6}$;

c) eine Eckenlinie des Körpers e? $e = 8{,}66$;

d) die Summe s einer Eckenlinie der Fläche und des Körpers? $s = 9$ oder $s = 5\sqrt{15}$ oder $s = \sqrt{18} + \sqrt{12}$;

e) der Umfang u oder f) der Inhalt i eines Schnittes durch gegenüberliegende Kanten?

24. In einem Würfel sei mitten durch eine Eckenlinie des

[§ 19.] Körpers die zu ihr senkrechte Ebene gelegt. Welchen a) Umfang, b) Inhalt hat die Schnittfigur?

25. Ein Würfel sei durch Ebenen abgeeckt, welche durch Kantenpunkte gehen, die je um a) die Hälfte, b) ein Viertel, c) ein Drittel der Kantenlänge a von der betreffenden Ecke abstehen. Welche Oberfläche hat der so gebildete Körper?

26. Die Oberflächensumme zweier Würfel sei s, die Summe von zweien ihrer Kanten $= k$. Wie grofs sind die einzelnen Oberflächen?

27. Drei zusammenstofsende Kanten eines Quaders haben das Verhältnis $= a : b : c$ (wobei die letztere Zahl der Höhe entspricht) und die Eckenlinie seiner Grundfläche sei $= d$. Wie grofs ist die Oberfläche? — Beisp.: $a : b : c = 8 : 15 : 19$ und $d = 23{,}8$.

28. In einem Parallelflach mit rechteckiger Grundfläche bildet eine Seitenkante a mit den Grundkanten b und c Winkel von 90^0 und 60^0. Wie grofs ist die Oberfläche?

29. Ein gerades regelmäfsig-dreiseitiges gleichkantiges Prisma habe die Oberfläche $= f$. Wie grofs sind seine Kanten?

30. Wie grofs ist die Oberfläche eines zehnseitigen regelmäfsigen Prismas, dessen Grundkante $a = 20$ cm und Seitenkante $s = 50$ cm ist?

31. Von einem regelmäfsigen acht-(zwölf-)seitigen Prisma, von welchem alle Kanten einander gleich sind, ist die Oberfläche O gegeben; wie grofs ist die Kante?

32. In einem geraden Prisma, dessen Höhe $= b$ und dessen Grundfläche ein regelmäfsiges Dreieck mit der Seite a sei, werde durch eine Grundecke parallel zur Gegenkante eine Ebene gelegt, die mit der Grundfläche den Winkel α bilde. a) Wie grofs ist die Schnittfigur? — b) Unter welchem Winkel müfste die Ebene gelegt werden, damit sie durch die Gegenkante der zweiten Grundfläche geht? — Beispiel: $a = 52{,}2$; $b = 87$; $\alpha = 31^0\,15'$.

33. Ein gerades quadratisches Prisma, dessen Grundkanten $= a$ sind, ist schief abgeschnitten, so dafs zwei Seitenkanten $= b$, die andern beiden $= c$ $(c > b)$. Es ist die Oberfläche des Körpers und der Winkel der beiden Grundflächen zu berechnen. — Beispiel: $a = 3{,}464$, $b = 0{,}866$, $c = 3{,}464$.

34. Wie grofs ist die Oberfläche eines regelmäfsigen achtseitigen Prismas, das der Art schief abgeschnitten ist, dafs die obere Endfläche mit der untern einen Winkel von 60^0 macht und einer Grundkante parallel ist? Die Grundkante sei $= 10$ cm und die beiden einander gleichen kürzesten Kanten $= 12$ cm.

35. In ein gerades quadratisches Prisma P sei ein anderes P' so einbeschrieben, dafs die Ecken von P' die Grundkanten a von P ringsum je in demselben Verhältnisse $u : v$ teilen. Man berechne aus den Kanten a und b des einen Prismas die Oberfläche des andern. — Beispiel: Es sei $u : v = 1 : 1$ (oder $= 4 : 5$).

[§ 19.] Cylinder.

36. Die Axenschnitte eines schiefen Cylinders sind Parallelogramme. — Welches ist der kleinste Axenschnitt? Welches der gröſste? Welcher Axenschnitt ist ein Rechteck? Giebt es unter allen Axenschnitten deckungsfähige?

37. Wie viele Quadratdecimeter Goldschaum erfordert das Bekleben der äuſseren Fläche des Mantels und des Deckels einer cylindrischen Schachtel, deren Bodendurchmesser 325 mm und Höhe 196 mm beträgt, während der Deckel einen Durchmesser von 327 mm hat und sein Rand 33 mm hoch ist?

38. Für einen geraden Kreiscylinder bedeute r den Halbmesser, h die Höhe, M die Mantelfläche, O die Gesamtoberfläche. Man soll nun bestimmen:
a) M aus r und h; b) O aus r und h; c) h aus M und r; d) h aus O und r; e) M für $r = h$;
f) r aus O und h (insbesondere wenn $O = 3{,}92\,\pi$ und $h = 4{,}5$).

39. Wie groſs ist der Mantel des Cylinders, welcher:
a) einem Würfel mit der Kante a um- oder einbeschrieben ist?
b) dem in Aufg. 35 bestimmten Prisma P einbeschrieben ist?
c) dem Prisma P' in Aufg. 35 umbeschrieben ist?

40. Man soll die Höhe eines geraden Cylinders bestimmen, dessen Mantel gleich der Mantelsumme zweier gegebenen Cylinder (r, h, r_1, h_1) und dessen Grundfläche einem gegebenen gleichseitigen Dreieck (Seite $= s$) a) eingeschrieben, b) umgeschrieben ist.

41. Wie zeichnet man den Halbmesser einer Kreisfläche, welche mit der einem gegebenen geraden Kreiscylinder zugehörigen a) Mantelfläche, b) Gesamtoberfläche übereinstimmt?

42. Die Gesamtoberfläche eines gleichseitigen Cylinders, d. i. eines solchen, dessen Axenschnitte Quadrate sind, betrage O. Wie groſs sind seine Abmessungen? — Beispiel: a) $O = 471$ qcm; b) $O = 6\pi$.

43. Man soll die Wandfläche einer a Meter langen geraden Kanalröhre berechnen, deren Querschnitt $AOA'D'UDA$ in folgender Weise bestimmt ist: Eine Seite $AA' = 2s$ eines gleichseitigen Dreiecks $AA'C$ werde beiderseits über A und A' hinaus um s verlängert bis B und B'; dann beschreibe man aus letzteren Punkten mit $3s$ als Halbmesser Bogen bis zu den Verlängerungen der andern Dreiecksseiten d. i. bis D' und D, und schlieſse die Fläche von C aus durch den Bogen DUD' und über AA' durch den Halbkreis AOA'.

44. Ein gerader Cylinder hat den Durchmesser d und ist schief abgeschnitten, so daſs seine längste Seitenlinie $= a$, seine kürzeste $= b$ ist. Wie groſs ist seine Oberfläche?

45. Wie groſs ist die Oberfläche des diesem Cylinder einbeschriebenen achtseitigen Prismas mit regelmäſsiger Grundfläche,

[§ 19.] wenn je eine Seitenkante mit der kürzesten und der längsten Seitenlinie des Cylinders zusammenfällt?

46. In einem schiefen Cylinder mit kreisförmigem Querschnitt sei die der Axe parallele Seite des Hauptaxenschnittes $= a$, die andere $= 2b$ und der Grundrifs des Axenendpunktes falle in den Grenzpunkt von $2b$. Wie grofs ist der Mantel? und die Gesamtoberfläche? — Beispiel: $a = 43{,}3$; $2b = 29$.

47. Die Gesamtoberfläche einer geraden cylindrischen Röhre sei G, wenn ihre Länge $= l$, ihre lichte Weite $= 2r$ und ihre Wandstärke $= d$ ist. a) In welchem Zusammenhang stehen diese vier Gröfsen? b) Wie berechnet man jede derselben, wenn je die drei andern bekannt sind?

48. Eine kreisrunde Öffnung im Boden und in der Decke einer Kammer von h cm Höhe sollen durch eine Rohrleitung verbunden werden. Die lotrechten Mittellinien der Löcher haben einen Abstand von a cm und die Löcher einen Halbmesser von r cm. Die Leitung soll aus zwei gleichlangen lotrechten Stücken bestehen und einem Zwischenstück, dessen Mittellinie mit der Lotlinie einen Winkel von 120^0 macht. Wie lang sind die Mittellinien der drei Rohrstücke zu nehmen und wie viele Quadratcentimeter Blech sind erforderlich?

49. Von einem geraden Cylinder, dessen Länge l und dessen Radius r ist, sei durch eine zur Axe parallele Ebene ein Teil abgeschnitten. Wie grofs ist die Oberfläche dieses Teiles, wenn die Schnittsehne des Kreises $= s$ ist? Insbesondere sei $s = r$, $(r\sqrt{2}, r\sqrt{3})$; — oder es sei statt s der zu s gehörige Mittelpunktswinkel $= 2\alpha$ gegeben.

50. Wie grofs ist in einem cylindrischen Dampfkessel, dessen Cylinderaxe wagrecht liegt und l cm lang ist und dessen Durchmesser $= d$ cm ist, a) die vom Wasser benetzte Fläche, b) die Oberfläche des Wassers, wenn die Tiefe des Wassers in der Mitte $= h$ cm ist?

51. Ein Trog hat die Form eines ausgehöhlten Cylinderabschnittes; die rechteckige obere Fläche ist im lichten 300 cm lang und 40 cm breit und hat ringsum eine Breite des Randes von 5 cm. Die lichte Tiefe des Troges ist in der Mitte 30 cm. Was kostet der Anstrich der Oberfläche, wenn der Quadratmeter mit 1 Mark berechnet wird?

V.

Aufgaben zur Ähnlichkeit von Körpern.

§ 20. **1.** Zwei Prismen sind ähnlich (gegenwendig ähnlich), wenn ihre Grundflächen ähnlich, ein paar entsprechende Grundecken deckungsfähig (gegenwendig gleich) und das zugehörige Paar von Seitenkanten dasselbe Verhältnis hat wie ein Paar der Grundkanten.

2. Gerade Prismen, welche einander ähnlich sind, sind auch [§. 20.] gegenwendig ähnlich.

3. Regelmäſsige n-seitige Prismen sind ähnlich, wenn das Verhältnis der Seiten- und Grundkanten in beiden übereinstimmt.

4. Parallelflache sind ähnlich (oder gegenwendig ähnlich), wenn in ihnen ein Eckenpaar deckungsfähig (oder gegenwendig gleich) ist und wenn die drei anstoſsenden Kantenpaare in gleichem Verhältnis stehen.

5. Welches sind die den Aufgaben 1 und 3 entsprechenden Sätze für Cylinder?

6. Irgend zwei Kugeln liegen ähnlich zu einem äuſsern und zu einem innern Ä.-Punkt; beide Punkte teilen die Mittellinie im Verhältnis der Halbmesser.

7. Jede durch einen Ä.-Punkt zweier Kugeln gelegte Ebene, welche die eine Kugel berührt, berührt auch die andere.

8. Die Ä.-Punkte zweier sich nicht einschlieſsenden Kugeln sind die Spitzen der den beiden Kugeln gemeinsamen Berührungskegelflächen.

9. Man soll eine Kugel bestimmen, deren Mittelpunkt auf einer Geraden g liegt und welche zugleich durch einen gegebenen Punkt P geht und eine Ebene ε berührt. — Andeutung: Benütze den Schnittpunkt $(g\varepsilon)$ als Ähnlichkeitspunkt.

10. Der geometrische Ort aller Punkte, von welchen aus zwei gegebene Kugeln gleich groſs erscheinen, ist eine Kugelfläche, die die Strecke zwischen den beiden Ähnlichkeitspunkten der Kugeln als Durchmesser hat.

11. Man soll einen Punkt finden, von dem aus vier gegebene Kugeln gleiche scheinbare Gröſse haben. — Andeutung: Beachte Nr. 10.

12. Wenn zwei Kugeln einander ausschlieſsend (einschlieſsend) berühren, so ist der Berührungspunkt innerer (äuſserer) Ähnlichkeitspunkt.

13. Von drei Kugeln liegen die drei äuſseren Ä.-Punkte auf einer Geraden, ebenso je zwei innere und ein äuſserer. Die äuſsere Ä.-Axe ist die Schnittgerade der beiden den drei Kugeln gemeinsamen Berührungsebenen, von denen aus die drei Kugeln je nach derselben Seite hin liegen; die Ä.-Axe durch einen äuſsern und zwei innere Ä.-Punkte ist die Schnittgerade der beiden Berührungsebenen, von denen aus eine Kugel je einerseits, die beiden andern andrerseits liegen (II § 23, 8).

14. Denkt man sich eine Kugel entstanden durch Umdrehung eines Hauptkreises um die Mittellinie eines Punktes, so beschreibt die Polare des letzteren eine zur Mittellinie senkrechte Ebene, welche man Polarebene des Punktes nennt; diesen selbst nennt man den Pol der letzteren. Für beide gelten die folgenden Sätze:

[§ 20.] a) Die Sehnen aller Strahlen eines Punktes durch eine Kugel werden durch diesen Punkt und dessen Polarebene harmonisch geteilt (II § 19, 2).

b) Die Schnittpunkte einer Kugelfläche mit zwei Strahlen eines Punktes liegen so, daſs ihre Verbindungsgeraden einander paarweise in der Polarebene des Punktes schneiden (II § 19, 4).

15. Wenn wir die nicht ähnlich liegenden Punkte eines Ä.-Strahls durch zwei Kugeln Wechselpunkte (inverse Punkte) nennen, so gilt für diese:

a) In zwei Kugeln schneiden einander die Verbindungsgerade zweier Punkte der einen Kugel und die Verbindungsgerade ihrer Wechselpunkte in einer einzigen zur Mittellinie senkrechten Ebene, der Mittelparallelebene der beiden Polarebenen des Ä.-Punktes.

b) Diese Ebene ist der geometrische Ort aller Punkte, die für beide Kugeln gleiche Potenz haben, die sog. Potenzebene beider Kugeln (II § 23, 1).

c) Die drei Potenzebenen dreier Kugeln schneiden einander in einer Geraden (Potenzgerade), die senkrecht zur Mittelpunktsebene der Kugeln ist (II § 23, 8).

16. Berühren zwei Kugeln eine dritte gleichartig (ungleichartig), so sind die Berührungspunkte Wechselpunkte der ersten beiden Kugeln in Bezug auf einen äuſsern (innern) Ähnlichkeitspunkt.

17. Wenn zwei Kugeln einander schneiden, so ist die Ebene des Schnittkreises die Potenzebene für beide Kugeln.

18. Wenn zwei Kugeln einander berühren, so ist die gemeinsame Berührungsebene die Potenzebene für beide Kugeln.

19. Wenn drei Kugeln einander paarweise schneiden oder berühren, so gehen die Schnittebenen oder Berührungsebenen durch eine Gerade.

20. Wenn zwei Kugeln von einer dritten berührt werden, so liegt die Potenzebene der beiden ersten Kugeln, als Ebene zur dritten Kugel aufgefaſst, ähnlich zur Polarebene des Ähnlichkeitspunktes in einer der ersteren Kugeln, und zwar eines äuſsern (innern) Ähnlichkeitspunktes bei gleichartiger (ungleichartiger) Berührung.

21. Wenn drei Kugeln von einer vierten berührt werden, so liegt die Potenzgerade der drei Kugeln, als Gerade zur vierten Kugel aufgefaſst, ähnlich zur Schnittgeraden der beiden zu einer Kugel gehörigen Polarebenen der Ähnlichkeitspunkte dieser Kugel mit den beiden andern Kugeln, wobei der Ähnlichkeitspunkt ein äuſserer (innerer) bei gleichartiger (ungleichartiger) Berührung. — Es giebt hierbei acht verschiedene Arten der Berührung.

22. Zu vier Kugeln giebt es sechs äuſsere und sechs innere Ähnlichkeitspunkte, die auf acht Ebenen liegen; und zwar liegen die sechs äuſseren auf einer Ebene, ferner je drei äuſsere und drei

innere, sowie zwei äufsere und vier innere. (Je sechs solcher Punkte [§ 20.] liegen auf drei Geraden, von welchen jede die übrigen schneidet.)

23. Die sechs Potenzebenen von vier Kugeln schneiden einander in einem Punkt, dem sog. Potenzpunkt der vier Kugeln.

24. Wenn vier Kugeln von einer fünften berührt werden, so liegt der Berührungspunkt einer Kugel auf der Geraden vom Potenzpunkt der vier Kugeln nach dem Schnittpunkt der drei zu der betr. Kugel gehörigen Polarebenen der Ähnlichkeitspunkte, welche diese Kugel mit den drei übrigen Kugeln gemeinsam hat. — Es ergeben sich 16 die vier gegebenen Kugeln berührende Kugeln.

25. Welches sind die Grenzlagen der Ähnlichkeitspunkte, der zugehörigen Polarebenen und der Potenzebenen zwischen einer Kugel und einer zweiten Kugel, wenn die letztere a) zu einem Punkt zusammenschrumpft? b) zu einer Ebene sich ausbreitet?

26. Es sind von Punkten, Ebenen, Kugeln vier Elemente gegeben; man soll die Kugeln bestimmen, welche dieselben berühren. (Fermat 1679.)

VI.

Aufgaben zu Pyramiden und Kegeln.

§ 21. Pyramide.

1. Wird eine dreiseitige Pyramide durch eine Ebene geschnitten, welche zwei windschiefen Kanten derselben parallel ist, so ist die Schnittfigur ein Parallelogramm.

2. a) Legt man in einer dreiseitigen Pyramide Ebenen durch jede der von einer Ecke ausgehenden Kanten und je durch die Schwerlinie der gegenüberliegenden Seitenfläche, so gehen diese drei Ebenen durch eine Gerade s. — Wie viele solche Gerade s giebt es?

b) Die Geraden s in a) gehen durch einen Punkt, den sogen. Schwerpunkt des Körpers, und jede derselben wird durch den Schwerpunkt im Verhältnisse von $3:1$ geteilt (vgl. S. 69, 1b).

c) Giebt es in der dreiseitigen Pyramide auch, entsprechend wie im Dreieck, einen Höhenpunkt, einen Mittelpunkt der Ecken und einen (oder mehrere) der Seiten?

d) Durch den Schwerpunkt der dreiseitigen Pyramide gehen auch die Verbindungsgeraden der Mitten gegenüberliegender Kanten, und diese halbieren einander.

3. In jeder dreiseitigen Pyramide beträgt die Summe der sechs Flächenwinkel mehr als $4R$, aber weniger als $6R$.

4. Für jede Pyramide gelten die folgenden Sätze:

a) Die Summe der Seitenflächen ist gröfser als die Grundfläche.

b) Zwei Seitenkanten (oder auch die Höhen zweier Seitenflächen) verhalten sich umgekehrt wie die Sinus ihrer Neigungswinkel gegen die Grundfläche.

[§ 21.] **5.** a) Welche Seitenfläche einer dreiseitigen Pyramide mit rechtwinkeligem Dreikant (sog. rechtwinkeliges Tetraëder) kann Hypotenusenfläche und welche können Kathetenflächen heifsen?

b) In welcher Gröfsenbeziehung steht eine Kathetenfläche zur Hypotenusenfläche eines rechtwinkeligen Tetraëders?

c) Das Quadrat der Hypotenusenfläche ist gleich der Summe der Quadrate der Kathetenflächen. Andeutung. Ziehe vom Scheitel die senkrechte Strecke zur Hypotenusenfläche und benutze S. 13, 7 und S. 36, 1.

6. In einem regelmäfsigen Tetraëder bestimmen die Mittelpunkte von zwei Paar gegenüberliegenden Seiten ein Quadrat.

7. In einem regelmäfsigen Tetraëder ist jede Verbindungsgerade der Mitten zweier Gegenseiten a) Mittelsenkrechte zu diesen Seiten, b) Mittelsenkrechte zu den beiden andern Verbindungsgeraden der Seitenmitten, c) Mittellinie für das Tetraëder.

8. Eine Strecke c sei Mittelsenkrechte zwischen zwei windschiefen, zu einander senkrechten Strecken $AA' = 2a$ und $BB' = 2b$. Wie viele Ebenen sind durch die Punkte bestimmt? und welche Art von Körpern umschliefsen die Ebenen?

9. Welcher Körper wird gebildet, wenn in vor. Aufgabe $a = b$ und $c = a\sqrt{2}$ ist?

10. Wird in dem durch die Aufgabe 8 bestimmten Körper BB' nicht von c halbiert, so teilt die Halbierungsebene des Ebenenwinkels bei AA' die Gegenkante im Verhältnis der den Flächenwinkel einschliefsenden Seiten.

11. In der Ebene, die eine Strecke $AA' = 2a$ senkrecht halbiert, seien gegengesetzt in Bezug auf den Mittelpunkt zwei Paare Punkte B und B', C und C' gewählt, und dabei sei $BB' = 2b$, $CC' = 2c$ und $\sphericalangle(bc) = \gamma$. Welche Ebenen sind durch die Punkte bestimmt? und welchen Körper umschliefsen die Ebenen?

12. Welchen Körper erhält man aus den in Aufg. 11 gekennzeichneten, wenn angenommen wird:

1) $a = b = c$ und $\gamma = R$? 2) $b = c$ und $\gamma = R$?

3) $a > b > c$ und $\gamma = R$? 4) $b = c$ und $\gamma = \frac{2}{3}R$?

13. a) Man soll über einer gegebenen regelmäfsigen Grundfläche eine Pyramide errichten, deren Seitenkanten den Grundkanten gleich sind.

b) Beweise, dafs es keine mehr als fünfseitige Pyramide giebt, die gleichkantig ist.

c) Von einer regelmäfsigen 3-(4-, 5-)seitigen Pyramide, deren Seitenkanten gleich den Grundkanten sind, sind zu berechnen die Winkel a) der Seitenfläche und Grundfläche; b) zweier Seitenflächen; c) der Seitenkante und Grundfläche.

14. a) Von einer quadratischen Pyramide ist aus dem Winkel α zwischen Seiten- und Grundfläche der Winkel zweier Seitenflächen 2β zu berechnen, oder umgekehrt; ferner das Verhältnis der Höhe zur halben Eckenlinie der Grundfläche (Haupt- und Nebenaxe). § 21 u. § 17.

Zirkon: $\alpha = 42^0\,10'$; $\beta = 61^0\,40'$.

b) Ebenso von einer regelmäſsigen sechsseitigen Pyramide.

Apatit: $\alpha = 40^0\,18'$; $\beta = 71^0\,8'$.

15. Von einer geraden Pyramide, deren Grundfläche eine Raute ist, ist der Winkel α zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche und der Winkel zweier benachbarten Seitenflächen 2β gegeben. Es sind die Winkel der Seiten- und Grundkante mit den Eckenlinien der Grundfläche zu bestimmen, sowie das Verhältnis der halben Eckenlinien unter einander und zur Höhe; ferner der Winkel γ, welchen eine der genannten Seitenflächen mit einer weitern Seitenfläche bildet.

Schwefel: $\alpha = 71^0\,38{,}5'$, $\beta = 53^0\,19'$, ($\gamma = 42^0\,29'$).

16. Von einem Rhomboëder soll aus dem Ebenenwinkel 2α an einer Polkante der Ebenenwinkel 2β an der Seitenkante berechnet werden oder umgekehrt; ferner das Verhältnis der Hauptaxe zur Nebenaxe (vgl. S. 151, Aufg. 21).

Kalkspath: 1) $2\alpha = 105^0\,8'$; 2) $2\alpha = 135^0$; 3) $2\alpha = 79^0$.

Oberfläche der Pyramide.

17. Man soll die Oberfläche einer geraden Pyramide mit regelmäſsiger Grundfläche berechnen, wenn ihre Grundkante $= a$, die Höhe $= h$ gegeben und wenn die Grundfläche ein a) Viereck, b) Dreieck, c) Sechseck, d) Achteck ist.

18. Ebenso wie 17, wenn statt h die Seitenkante s gegeben ist.

19. Die Höhe einer geraden Pyramide mit gleichseitigem Dreieck als Grundfläche sei doppelt so groſs als a) eine Grundkante, b) die Höhe der Grundfläche. Die Gesamtoberfläche sei $= G$. Welche Abmessungen hat die Pyramide?

20. Bestimme die Oberflächen der Pyramiden, welche gekennzeichnet sind durch die Angaben in den Aufgaben a) S. 139, 32, ferner S. 158 b) 8, c) 9, d) 11, e) 12, f) 13.

21. Auf eine quadratische Platte, deren Seite a ist, soll eine regelmäſsige achtseitige Pyramide gestellt werden, von welcher zwei Paar gegenüberliegender Grundkanten in die Seitenkanten der Platte fallen und deren Seitenkanten ebenfalls $= a$ seien. Es ist zu berechnen die Grundkante der Pyramide, die Grundfläche, der Mantel und die Höhe.

22. In einer rechtwinkeligen dreiseitigen Pyramide (vgl. 5 a) sei die Hypotenusenfläche ein a) gleichseitiges Dreieck mit der Seite a, b) gleichschenkeliges Dreieck mit den Seiten a, b, b. Wie groſs ist die Gesamtoberfläche?

23. Welchen Winkel bilden in einer geraden regelmäſsigen drei-

[§ 21.] seitigen Pyramide Seiten- und Grundfläche mit einander, wenn eine der ersteren $n$mal so groſs ist als letztere?

24. Zwei entsprechende Kanten zweier ähnlichen Pyramiden seien $= 3{,}9$ und $6{,}5$, und ihre Oberflächen unterscheiden sich von einander um 272. Welche Oberfläche hat jede der Pyramiden?

25. Herodot sagt von der groſsen quadratischen Pyramide zu Ghizeh, daſs ihr Höhenquadrat gleich einer Seitenfläche sei. Welchen Winkel bildet hiernach eine Seitenkante mit der a) Grundkante? b) Grundfläche?

26. Der Geograph Strabo berichtet, die Höhe der eben genannten Pyramide sei ein ägyptisches Stadion. Man berechne den Umfang der Grundfläche und vergleiche denselben mit dem Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser ein Stadion ist.

27. Wie groſs ist die Oberfläche des Stumpfes einer regelmäſsigen 3-(4-, 5-, 6-, 8-, 10-, 12-)seitigen Pyramide, dessen untere Kante $= a$, obere Kante $= b$ und Seitenkante $= c$ ist?

28. Dieselbe Aufgabe ist zu lösen, wenn statt der Seitenkante die Höhe h des Stumpfes gegeben ist.

29. Ein steinerner Wegweiser hat die Form eines regelmäſsigen dreiseitigen Pyramidenstumpfes, der auf einem dreiseitigen Prisma ruht. Die Höhe des Prismas ist a, die Grundkante b, die Höhe des Stumpfes h, die untere Kante c, die obere d. Was kostet der Anstrich des Steines, wenn für den Quadratmeter p Pfennige gefordert werden? $a = 60$ cm, $b = 12$, $h = 100$, $c = 55$, $d = 30$ cm, $p = 150$ Pf.

30. Entsprechend den Aufgaben S. 154, V, 1 und 3 sollen die Bedingungen für die Ähnlichkeit der Pyramiden (und Kegel) aufgestellt werden.

Kegel. **31.** Ist eine Berührungsebene eines beliebigen Kreiskegels stets senkrecht zu dem durch ihre Seitengerade gehenden Axenschnitt?

32. Unter allen Axenschnitten eines schiefen Kegels hat der Hauptaxenschnitt den kleinsten Inhalt. — Wie wechselt die Gröſse des Axenschnittes mit der Lage desselben? Welcher Axenschnitt hat den gröſsten Inhalt?

33. Es bezeichne für den geraden Kegel: r den Halbmesser des Grundkreises, s die Seitenlinie, h die Höhe, α den Winkel an der Spitze des Axenschnittes, m die Mantelfläche. — Man soll berechnen:

1) m aus r und h; 2) r aus m und s; 3) m aus s und h;
4) m aus α und r; 5) s aus m und α; 6) α aus m und s;
7) α aus $h = 5$ und $m = 12{,}5\pi$;
8) α aus der Angabe, daſs die Mantelfläche das $\sqrt{2}$-fache der Grundfläche sei.

34. Es bezeichnen für den geraden Kegelstumpf: R und r die Halbmesser der Grundkreise ($R > r$), s die Seitenlinie, h die Höhe, m die Mantelfläche, — und für den betreffenden Ergänzungskegel:

s_1 die Seitenlinie, h_1 die Höhe und m_1 die Mantelfläche, — und für [§ 21.] den ganzen Kegel: S die Seitenlinie, H die Höhe und M die Mantelfläche. — Man soll berechnen:

1) m aus R, r, s; 2) m aus R, h, s; 3) m aus R, r, S;
4) m aus R, r, H; 5) M aus S, s, r; 6) s aus M, H, h;
7) R aus M, s, h; 8) r aus M, s, h; 9) m_1 aus s, S, M;
10) m aus M, R, r; 11) h aus m, s, r; 12) m_1 aus M, R, s.

35. Ein gleichseitiger Kegel, d. h. ein solcher, dessen Axenschnitte gleichseitige Dreiecke sind, habe die Höhe $= h$. Wie grofs ist seine Gesamtoberfläche?

36. In einem geraden Kegel sei der Grundkreis um 15 cm länger als die Seitenlänge, und a) der Mantel — oder b) die Gesamtoberfläche betrage 650 qcm. Welche Abmessungen und welchen Axenschnittwinkel hat der Kegel?

37. In welchem Verhältnis steht die Mantelfläche zur Grundfläche eines gleichseitigen Kegels?

38. Man soll das Netz eines geraden Kegels zeichnen, dessen Axenschnittwinkel a) $\frac{2}{3}R$, b) $1R$, c) $1\frac{2}{3}R$.

39. Ein a) Sechstels-, b) Viertels-, c) Halbkreis mit dem Halbmesser $= r$ werde zu einem Kegel gebogen. Wie grofs sind des letzteren Halbmesser, Höhe, Axenschnittwinkel und Gesamtoberfläche?

40. Ein rechtwinkeliges Dreieck werde nach einander um jede der Katheten gedreht und erzeuge so zwei Kegel, deren Mantelflächen das Gröfsenverhältnis $p : q$ haben. a) Welches Verhältnis haben die Seiten des Dreiecks? b) Welche Mittelpunktswinkel zeigen die aufgerollten Mäntel, falls $\frac{p}{q} = 0{,}75$?

41. Das Dach eines runden Turmes besteht aus einem Kegelstumpf, dessen unterer Halbmesser $= 2{,}5$ m und Höhe $= 1$ m und dessen Seitenkante unter 45^0 gegen die Grundfläche geneigt ist, und aus einem spitzeren Kegel, der auf der oberen Fläche des Kegelstumpfes aufsitzt und eine Höhe von 5 m hat. Wie grofs ist die Dachfläche?

42. Ein Kugelventil besteht aus einer Kugel, die in einer nach unten sich verjüngenden Kegelfläche ruht. Die Ebene des vom Kegel berührten Kreises der Kugel halbiere den lotrechten Kugelhalbmesser ($= r$), und die Kugel werde durch den Druck des Wassers von unten um den halben Kugelhalbmesser gehoben. Wie grofs ist in dieser Lage der kürzeste Abstand zwischen Kugel und Kegel? und wie grofs die Öffnungsfläche zwischen beiden, die diesem Abstand entspricht?

43. Ein regelmäfsiges Sechs- (5-, 8-, 10-, 12-) Eck, dessen Seite $= a$ ist, werde um die Mittelsenkrechte einer Seite (oder Halbierende eines Winkels) gedreht. Wie grofs ist die Oberfläche des Umdrehungskörpers?

[§ 21.] **44.** Das Netz eines Ringes soll hergestellt werden, dessen Querschnitt ein Quadrat ist, von dem eine Eckenlinie parallel der Axe des Ringes ist, die Quadratseite $= a$ und der Abstand der Mitte des Quadrates von der Axe des Ringes gleich der Eckenlinie des Quadrates. Wie grofs müssen die Halbmesser und Mittelpunktswinkel der vier ebenen Ringstücke sein, die zusammengerollt einen solchen körperlichen Ring geben?

45. Einem geraden Prisma, dessen Höhe h und dessen Grundfläche ein regelmäfsiges Sechseck mit der Seite a ist, sei ein gleich hoher gerader Kegel einbeschrieben, dessen Grundkreis das Sechseck berühre. In welchem Verhältnis stehen die a) Mantelflächen, b) Gesamtoberflächen beider Körper?

46. Über dem Kreise, dessen Halbmesser r ist, stehe ein gerader Cylinder und ein gerader Kegel von gleicher Höhe h. a) In welchem Verhältnis stehen die Mantelflächen beider Körper? b) Kann der Mantel des Cylinders das Doppelte des Kegelmantels sein? c) Ist letztere Beziehung für die Gesamtoberflächen möglich?

47. Ein gerader Kegel soll durch einen gleich hohen gleichaxigen Cylinder so durchschnitten werden, dafs die Mantelfläche des ersteren a) der des letzteren gleich werde; b) halbiert werde; c) im Verhältnis von $1 : n$ geteilt werde. Man soll die Abmessungen des Cylinders zeichnen, wenn r und h des Kegels gegeben sind.

48. Ein gegebener gerader Kegelstumpf (mit r_1, r_2 und h) werde geschnitten durch einen den Grundflächen parallelen Kreis, dessen Fläche das a) arithmetische, b) geometrische Mittel sei zwischen den beiden Grundflächen. Man soll den Halbmesser des Kreises zeichnen und die Fläche des dem kleineren Kreis anliegenden Mantelteils berechnen.

49. Gegeben sei auf quadratischer Grundfläche eine gerade Pyramide, deren Seitenfläche als Höhe die Länge a der Grundkante habe. Dieser Pyramide werde ein berührender Kegel einbeschrieben, letzterem wieder eine ähnliche Pyramide, letzterer wieder der berührende Kegel u. s. f. unbegrenzt. Welche Gröfse hat die Summe aller Kegelmäntel?

VII.

Aufgaben zur Fläche der Kugel und ihrer Teile.

§ 22. Kugel. **1.** Wie viele Quadratmeilen mifst die Oberfläche der Erdkugel, da ihr Äquator 5400 geogr. Meilen lang ist?

2. Wie grofs ist der Halbmesser einer Kugel, deren Oberfläche gleich der Summe zweier Kugelflächen mit den Halbmessern r_1 und r_2 ist?

3. Die Fläche eines Kugelschnittkreises sei a^2, während ihr Abstand von der Kugelmitte d beträgt. Welche Gröfse hat die Kugelfläche? [§ 22.]

4. Wie verhalten sich die Oberflächen einer Kugel, eines Cylinders und eines Kegels, deren Grundkreise mit dem Kugelhalbmesser beschrieben sind und deren Höhe gleich dem Kugeldurchmesser ist?

5. Wie verhält sich die Oberfläche des Mondes zu der der Erde, wenn der Mond in der Entfernung von 60 Erdhalbmessern den scheinbaren Durchmesser von $\frac{1}{2}^0$ hat?

6. Eine Kugel, deren Halbmesser $= r$ ist, berühre einen Kegel, dessen Spitze den Abstand a vom Kugelmittelpunkt hat. In den Raum zwischen Kugel und Kegelspitze sei eine unendliche Reihe von Kugeln gelegt, deren jede die vorangehende und den Kegel berührt. Wie grofs ist die Gesamtheit der Oberflächen dieser Kugeln?

7. Wie grofs ist in einer Kugel vom Halbmesser r die Fläche einer Haube, wenn a) ihr Begrenzungskreis den Halbmesser ϱ hat? b) der Halbmesser ihres Begrenzungskreises doppelt so grofs ist als ihre Höhe? **Haube.**

8. Wie hoch ist bei gegebener Kugel eine Haube, deren krumme Fläche das $n$fache ihrer Kreisgrundfläche ist? Beispiel: $n = 2$. — Welcher Bedingung mufs n genügen, damit die gesuchte Höhe geringer als ein Halbmesser wird?

9. Ein leuchtender Punkt stehe vom Mittelpunkte einer gegebenen Kugel um a ab. Welche Fläche der Kugel wird beleuchtet? — Beispiel: $r = 10$, $a = 45$ mm. — Wie grofs mufs a gewählt werden, damit drei Viertel der Kugel im Dunkeln bleiben?

10. Eine Licht ausstrahlende Kugel vom Halbmesser R beleuchte eine den Halbmesser r besitzende Kugel, und der Mittelpunktsabstand beider sei d. Welcher Teil der Kugelfläche wird beleuchtet? — Beispiel: a) $R = 20, r = 6, d = 72$ mm; b) $R = 108 \cdot r$, $d = 23300 \cdot r$.

11. Wie hoch müfste man sich über die Erde ($r = 858$ Ml.) erheben, um eine Fläche f (z. B. Europa $= 182\,200$ Qdtml.) zu übersehen?

12. Einer Kugel seien (mit parallelen Grundflächen) ein gleichseitiger Cylinder und Kegel ein- und umbeschrieben. Wie verhalten sich die a) Mantelflächen, b) Gesamtoberflächen der fünf Körper? c) In welche Teile teilt der eingeschriebene Cylinder die Kugelfläche?

13. In welchem Verhältnis stehen die zwei Teile, in welche die Axe eines Kugelausschnitts (s. S. 65, 1) durch den Grundkreis seines Kegels geteilt wird, wenn hierdurch zugleich die Gesamtoberfläche halbiert wird?

14. Über dem Grundkreis einer Halbkugel stehe ein gerader

[§ 22.] Kegel von doppelter Höhe. Wie wird durch diesen die Kugelfläche geteilt? Antwort: Wie 1 : 4.

15. Wenn zwei Kugeln einander berühren und von einem sie gemeinsam berührenden Kegel umhüllt werden, so liegen zwischen den beiden Kreisen, in denen der Kegel die Kugeln berührt, zwei Kugelhauben, deren Oberflächensumme gleich ist der Mantelfläche des Kegelstumpfes zwischen beiden Kreisen. Beweis?

16. Zwei Kugeln, deren Halbmesser r_1 und r_2 sind, haben den Mittelpunktsabstand d. a) Wie grofs ist der Mantel des Kegelstumpfes, der beide Kugeln berührt und durch die Berührungskreise begrenzt wird? b) Wie grofs sind die beiden Kugelhauben, die über diesen Kegelstumpf hervorragen? c) Wie grofs ist die Gesamtheit dieser Flächen? d) insbesondere, wenn $d = r_1 + r_2$ ist?

17. Ein Kessel hat die Form eines Kegelstumpfes, dessen oberer Durchmesser 58 cm, der untere 34 cm und Höhe 35 cm; den Boden des Kessels bildet eine Kugelhaube, deren Tiefe in der Mitte 5 cm beträgt. Der Deckel ist ebenfalls eine Kugelhaube, dessen Höhe in der Mitte 3 cm ist. Aus wie vielen Quadratdecimetern Blech besteht der Kessel?

18. Ein Kessel soll aus einem Kegelstumpf und einer Kugelhaube so zusammengesetzt werden, dafs beide Flächen sich in einer gemeinsamen Kreislinie berühren. Die Höhe des Kegelstumpfes sei h, der Halbmesser des oberen (gröfseren) Begrenzungskreises sei ϱ_1, der des Kreises der Berührung ϱ_2. Die Oberfläche des Kessels ist zu berechnen.

Zone. **19.** Welche Fläche hat eine Kugelzone, für welche bekannt sind: a) der Kugelhalbmesser r und je die Abstände d_1 und d_2 der Begrenzungskreise vom Mittelpunkt? b) die Halbmesser ϱ_1 und ϱ_2 der beiden Begrenzungskreise und ihr Abstand h von einander?

20. Welche Gesamtoberfläche hat eine Kugelzone, von welcher die Höhe h, der Halbmesser ϱ_1 des gröfseren Begrenzungskreises und der Kugelhalbmesser r bekannt sind?

21. Äquator, Wendekreis und Polarkreis liegen auf der Erde unter 0^0, $23^0 27'$ und $66^0 33'$ geogr. Breite und begrenzen die heifse, gemäfsigte und kalte Zone. In welchem Flächenverhältnis stehen diese Zonen zu einander?

22. Wie mufs, parallel der Grundfläche einer Halbkugel, eine Ebene gelegt werden, damit die zwei Teile gleichgrofse a) krumme Oberfläche, b) Gesamtoberfläche erhalten?

23. Welche Gröfse hat der Teil der Erdoberfläche, welcher zwischen 48^0 und 54^0 n. Br. und zwischen 7^0 und 19^0 ö. L. liegt?

24. Wie grofs ist die Oberfläche eines Ringes von der Höhe h, der innen eine cylindrische Fläche vom Halbmesser ϱ hat und aufsen kugelförmig gekrümmt ist?

25. Wie grofs ist die Oberfläche eines Ringes, dessen beide [§ 22.] Begrenzungskreise die Halbmesser ϱ_1 und ϱ_2 und den Abstand h haben, wenn der Ring innen kegelförmig und aufsen kugelförmig gekrümmt ist?

26. Für die Oberfläche Z der Kugelzone zwischen den Parallelkreisen, deren geogr. Breiten φ_1 und φ_2 $(\varphi_1 > \varphi_2)$ sind, uud dem Mantel M des von diesen Parallelkreisen begrenzten Kegelstumpfes gilt die Gleichung: $M = Z \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$. Beweis!

27. Um wieviel übertrifft die Erdzone, die von den Parallelkreisen in den geogr. Breiten φ_1 und φ_2 $(\varphi_1 > \varphi_2)$ begrenzt ist, den Mantel des von diesen Parallelkreisen begrenzten Kegelstumpfes, wenn der Erdhalbmesser $= r$ ist? Das Ergebnis ist als ein einziges Produkt darzustellen.

VIII.

Aufgaben zum Inhalt von Prismen und Cylindern.

Vorbemerkung. Als Einheit des Körpermafses gilt meist ein Kubikmeter (kbm); die Unterabteilungen, je 1000teilig, heifsen Kubikdecimeter (kbdm), Kubikcentimeter (kbcm), Kubikmillimeter (kbmm). Der Raumgehalt des Kubikdecimeters heifst auch Liter (l); der Kubikmeter heifst auch Ster; 100 l sind ein Hektoliter. — Das Gewicht von 1 kbdm oder 1 Liter Wasser (bei 4° C) heifst ein Kilogramm (kg), das eines Kubikcentimeters ein Gramm (g) mit seinen zehnteiligen Unterabteilungen Decigramm, Centigramm, Milligramm (mg). 1000 g sind 1 Kilogramm, 500 g ein Pfund, 50 Kilogramm ein Zentner, 1000 kg eine Tonne, d. i. das Gewicht eines Kubikmeter Wassers. — Das specifische Gewicht eines Stoffes giebt an, wieviel Kilogramm ein Kubikdecimeter (Liter), oder wieviel Gramm ein Kubikcentimeter des Stoffes wiegt. — Das Gewicht eines schwimmenden Körpers ist gleich dem Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit.

§ 24, 1 u. 2. Prisma.

1. Man soll den Inhalt eines Würfels berechnen, wenn von ihm gegeben ist: a) die Kante ($k = 2$ m 7 cm); b) die Oberfläche f (= 17,34 qcm); c) die Eckenlinie d einer Fläche; d) die Eckenlinie D des Körpers; e) der Umfang u einer Ebene zwischen zwei gegenüberliegenden Kanten.

2. Verlängert man die Kanten a eines Würfels um b und errichtet über $(a + b)$ den Würfel, um welche Raumstücke übertrifft dieser Würfel den ersteren?

3. Wenn sich a) ein Würfel mit der Kante a, b) ein Quader mit den Kanten a, b, c bei einer gewissen Temperaturänderung für

[§ 24, 1 u. 2.] jede Längeneinheit um α ändert, um wieviel ändert sich sein Raumgehalt?

4. Genügt ein 10 m langes, 5 m breites und 350 cm hohes Schulzimmer für 50 Schüler, wenn das Gesetz verlangt, daſs auf jeden Schüler 2,9 kbm Luftraum gerechnet werden?

5. Berechne die Inhalte der folgenden in IV (S. 151 und 152) angegebenen Körper, nämlich der Nummern:

a) 23; b) 27; c) 28; d) 29; e) 30;
f) 31; g) 32; h) 33; i) 34.

Cylinder.

6. Ein cylindrisches Wasserbecken hat einen Durchmesser von 5 m. Wie viele Hektoliter Wasser faſst es, wenn das Wasser $\frac{1}{2}$ m tief steht?

7. a) Wie tief muſs ein cylindrisches Viertelliterglas sein, dessen innerer Durchmesser 6,8 cm ist? b) Welche Höhe und welchen Durchmesser hat ein cylindrisches Litergefäſs, das doppelt so hoch als weit ist? oder c) doppelt so weit als hoch?

8. Der cylindrische Wasserbehälter einer Straſsenspritze faſst 1800 Liter und hat einen Durchmesser von 90 cm. Wie lang ist der Behälter?

9. Eine Barometerröhre habe 11 mm lichten Durchmesser und darin stehe 76 cm hoch das Quecksilber. Welches Gewicht hat dieses? Wie groſs ist der (Quecksilber- oder) Luftdruck auf 1 qcm?

10. Ein cylindrischer Regenmesser hat 24 cm Durchmesser. Nach einem Regen wird das Wasser desselben in einem Standcylinder von 3 cm Durchmesser gemessen, den es 166 mm hoch anfüllt. Wie hoch stand das Wasser im Regenmesser? und wie viele Hektoliter Regenwasser fiel auf den Quadratkilometer?

11. Berechne die Inhalte der folgenden in IV (S. 153 und 154) angegebenen Körper, nämlich der Nummern:

a) 38, c—f; b) 39; c) 42; d) 43; e) 44;
f) 45; g) 46; h) 47; i) 49.

12. Die Axe eines Cylinders sei gegen die Grundfläche unter dem Winkel α geneigt und habe die Länge a. Der Halbmesser des Grundkreises sei $= r$. Wie groſs ist der Rauminhalt des Cylinders? $\alpha = 76^0 5'$, $a = 16{,}07$ cm, $r = 2{,}09$ cm.

13. Ein äuſserlich gerades prismatisches Gefäſs habe die Höhe h und als Grundfläche den Teil eines Quadrates, das gleichmäſsig auf je $\frac{1}{n}$ der Kantenlänge a abgeeckt ist; von oben ist es cylindrisch ausgebohrt, so daſs die geringste Wandstärke überall gleich d ist. Welchen Raumgehalt hat das Gefäſs selbst?

14. Eine Cementröhre von der Länge l hat innen eine cylindrische Fläche, deren Halbmesser $= r$ ist, und auſsen die Form eines

regelmäſsigen achtseitigen Prismas, dessen Grundkante $= a$ ist. Wie viele Kilogramm wiegt die Röhre, wenn das spez. Gewicht des Cements $= s$ ist? Beispiel: $r = 300$ mm, $a = 290$ mm, $l = 1$ m, $s = 2{,}3$. [§ 24, 1 u. 2.]

15. Von einer Cementröhre ist der Querschnitt der äuſseren Form ein Kreis, von dem der Abschnitt, der zum fünften Teil des Umfangs gehört, ersetzt ist durch ein Rechteck, dessen Seiten gleich der Sehne des Kreisabschnittes und der Höhe des Abschnittes sind. Der innere Kreis berührt die Sehne des Abschnittes. Der äuſsere Durchmesser ist d dm, die Länge der Röhre l dm, das spez. Gewicht $= s$. Wie viele Kilogramm wiegt die Röhre?

16. Ein cylindrischer Stab aus Silber von 8 cm Dicke und 50 cm Länge mit einer Vergoldung von $\frac{1}{10}$ mm Dicke wird zu einem feinen Draht von 20 Kilometer Länge ausgezogen. Wie dick wird dann die auf der ganzen Länge des Drahtes zusammenhängende Vergoldung sein?

17. In eine hohle eiserne cylindrische Straſsenwalze, deren Länge und Höhe im Lichten 1 m 20 cm und 1 m 10 cm beträgt, ist bis über Höhenmitte Wasser eingefüllt worden, so daſs dessen Oberfläche 0,6 qm miſst. Wie tief steht das Wasser? und wie schwer ist es?

18. Ein massiver Cylinder schwimme bei wagrechter Lage der Axe so auf Wasser, daſs er mit der Hälfte seines Halbmessers r unter Wasser ist. Wie groſs ist das spezifische Gewicht des Stoffes?

19. Ein wagrecht liegender hohler Cylinder, dessen lichter Durchmesser 5 dm ist und dessen Länge 12 dm, ist noch so weit mit Flüssigkeit gefüllt, daſs ein lotrecht eingetauchter Stab 1 dm hoch benetzt würde. Wie viele Liter Flüssigkeit sind vorhanden?

20. Ein cylindrisches Stück Buchenholz von 141 mm Länge und 100 mm Durchmesser schwimmt bei wagrechter Lage der Axe so auf Wasser, daſs der lotrechte Durchmesser 15,6 mm aus dem Wasser hervorragt. a) Wie groſs ist das spez. Gewicht des Buchenholzes? und b) wie viele Gramm wiegt das Stück Holz?

21. Eine Schwimmschule ruht auf cylindrischen Tonnen vom Durchmesser $d = 60$ cm und der Länge $l = 6$ m. a) Wie groſs ist das Gewicht einer solchen Tonne, wenn sie ohne Belastung bis zur Tiefe $h = 20$ cm eintauchend schwimmt? b) Wie groſs ist ihre Belastung, wenn sie durch diese bis zur Tiefe von 40 cm eintaucht?

22. Wie viele Liter Wasser flieſsen in einer Minute durch eine cylindrische Kanalröhre, deren Durchmesser im Lichten 40 cm ist, wenn die Tiefe des Wassers in der Mitte der Röhre 10 cm und die Geschwindigkeit des Wassers 1,2 m in der Sekunde?

IX.

Aufgaben zum Inhalt von Pyramiden und Kegeln.

§ 24, 3. Pyramide.

1. Berechne die Inhalte der in VI (S. 159) bestimmten Körper, nämlich in Nummer:

a) 17; b) 18; c) 19; d) 9; e) 11; f) 12; g) 21; h) 22; i) 23, wobei die Grundkante $= a$ sei; k) 26.

2. Welchen Inhalt hat eine a) vierseitige, b) fünfseitige gleichkantige Pyramide mit der Kante a?

3. Ein Stein hat die Form einer dreiseitigen (quadratischen) Pyramide mit prismatischem Sockel. Die Grundkante von Pyramide und Prisma ist $= 45$ cm, die Seitenkante der Pyramide 135 cm und des Sockels 25 cm. Wie viele Kilogramm wiegt der Stein, wenn sein spez. Gewicht $= 2{,}5$ ist?

4. Ein Zirkonkrystall hat die Form einer quadratischen Säule, auf deren Endflächen quadratische Pyramiden aufsitzen, deren Flächen mit den Säulenflächen Winkel von $132^0\,10'$ bilden. Wie grofs ist das spez. Gewicht des Krystalls, wenn die Grundkante der Säule $= 3$ mm, die Seitenkante $= 8$ mm und das Gewicht $= 361$ mg ist?

5. Von einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche sei der Körperinhalt k und der Inhalt i eines durch zwei Gegenseitenkanten gelegten Schnittes gegeben. Welche Gröfse haben die am Körper vorkommenden Winkel von a) Kanten mit Flächen? b) Kanten mit Kanten? c) Flächen mit Flächen?

6. Von einer dreiseitigen Pyramide seien die Kanten einer Ecke a, b, c und deren Winkel $\sphericalangle ab = \gamma$, $\sphericalangle bc = \alpha$, $\sphericalangle ca = \beta$. Wie grofs ist sein Inhalt?

Kegel.

7. Welchen Inhalt hat ein gleichseitiger Kegel, dessen a) Seitenlinie s ist? b) Höhe h ist?

8. Bestimme den Inhalt eines Kegels, dessen Netz ein a) Viertel-, b) Sechstel-, c) Halbkreis (Filter) mit dem Halbmesser s ist.

9. Es soll ein Becher hergestellt werden zum Anhängen an einen Brunnen; er soll die Form eines Kegels erhalten und $\frac{1}{4}$ Liter fassen. Seine Tiefe soll $1\frac{1}{2}$mal so grofs sein, als sein Durchmesser am offenen Ende. Wie grofs ist Halbmesser und Mittelpunktswinkel (oder Sehne) des Kreisausschnittes zu nehmen, welcher aus Blech herzustellen ist, um durch Zusammenrollen desselben den Becher zu erhalten?

10. Ein Dreieck, dessen Seiten 44, 37, 15 sind, drehe sich nach einander um jede der Seiten. Welche Körperinhalte entstehen so?

11. Nach den Bezeichnungen in VI, 33 (S. 160) und Bezeichnung des Kegelinhaltes mit i bestimme man:

a) i aus m und s; b) i aus r und α; c) i aus m und α; [§ 24, 3.]
d) s aus i und r; e) i aus r und m; f) i aus m und $\frac{r}{s} = v$.

12. Mit einem geraden Kegel, dessen Halbmesser r und Seitenlinie s ist, habe ein gleichseitiger Kegel gleiche a) Mantelfläche, b) Gesamtoberfläche. Wie grofs ist der Inhalt des letzteren?

13. Von einem schiefen Kegel kennt man die gröfste Seitenstrecke a, die kleinste b und den Durchmesser der Grundfläche c. Man soll den Inhalt bestimmen. [$a = 5{,}8$, $b = 4{,}1$, $c = 5{,}1$.]

14. Ein Kegel, dessen Halbmesser r, Höhe h und spezifisches Gewicht s ist, schwimmt mit der Grundfläche nach unten (oder oben) im Wasser. Wie weit sieht er über dasselbe heraus? Beispiel: $h = 20$, $s = 0{,}45$.

15. Wenn über einer Strecke s als Grundseite ein Quadrat, ein gleichseitiges Dreieck und ein gleichschenkeliges mit dem Quadrat gleichhohes Dreieck gezeichnet wird, und sich jede der Figuren um die Mittelsenkrechte zu s dreht, in welchem Verhältnis stehen a) Mantelflächen, b) Gesamtoberflächen und c) Inhalte der Körper?

16. Bestimme das Verhältnis der Inhalte des einem regelmäfsigen Tetraëder einbeschriebenen und des ihm umbeschriebenen Kegels.

17. Gegeben sei ein gleichseitiger Kegel, und diesem soll ein auf der Grundfläche aufstehender gerader Cylinder einbeschrieben werden. Ist es möglich, dafs letzterer a) die halbe Mantelfläche, b) die halbe Gesamtfläche, c) den halben Inhalt des Kegels erhalte?

18. Der Inhalt eines gleichseitigen Kegels sei i. Man soll Oberfläche und Inhalt der ihm ein- und umgeschriebenen Pyramide berechnen, deren Grundfläche ein regelmäfsiges a) Viereck, b) Dreieck, c) Sechseck ist.

19. Welches Verhältnis besteht zwischen den Oberflächen (Inhalten) eines gleichseitigen Cylinders und gleichseitigen Kegels, wenn beide denselben Inhalt (dieselbe Oberfläche) haben?

X.

Aufgaben zum Inhalt von Pyramiden- und Kegelstumpf und schief abgeschnittener Säule.

§ 24, 4. Pyramiden- und Kegelstumpf.

1. Von dem Stumpf einer regelmäfsigen 6-(8-, 10-, 12-)eckigen Pyramide sei die Grundkante $= a$, die obere Kante $= b$, die Seitenkante $= s$. Wie grofs ist der Inhalt?

2. Ein Pyramidenstumpf, dessen Höhe h und dessen Grundflächen regelmäfsige Sechsecke mit den Seiten a und b sind, werde in der Mitte der Höhe durch einen zu den Grundflächen parallelen

[§ 24, 4.] Schnitt geteilt. In welchem Verhältnis findet die Teilung a) des Inhalts, b) des Mantels statt?

3. Ein Baumstamm habe die Gestalt eines Kegelstumpfes. Die Umfänge seiner Endflächen seien 2,12 m und 1,97 m, seine Länge 9 m. Wieviel Kubikdecimeter Holz enthält er?

4. Welchen Fehler begeht man, wenn man einen Kegelstumpf (Baumstamm) durch einen gleichlangen Cylinder ersetzt, dessen Halbmesser gleich dem Mittelhalbmesser des Kegelstumpfes ist?

5. Wenn r_1, r_2, h die Abmessungen eines geraden Kegelstumpfes sind, so soll man berechnen: a) J aus $r_1 = 8{,}2$, $r_2 = 5$, , $h = 4$; b) h aus $J = 10\,000$, $r_1 = 12{,}3$, $r_2 = 8{,}05$; c) r_1 aus $r_2 = 2{,}5$, $h = 6$, $J = 180$.

6. Man soll den Inhalt eines geraden Kegelstumpfes berechnen, von welchem gegeben ist: a) die Seitenlinie s, ihr Neigungswinkel α gegen die gröſsere Grundfläche und der Halbmesser r_1 der letzteren (z. B. $s = 17$, $\alpha = 69^0$, $r_1 = 19$); b) der Mantel m, das Verhältnis der Grundflächen $p:q$ und der Winkel 2α des Axenschnittes im Ergänzungskegel (z. B. $m = 537$, $p:q = \frac{121}{49}$, $2\alpha = 50^0$); c) die Höhe h, der Mantel m und der Unterschied d der Grundflächen.

7. Von einem Doppelkegel seien die Halbmesser der Begrenzungskreise r_1 und r_2 und der Abstand ihrer Flächen h. Wie groſs ist der Inhalt des Körpers?

8. Wenn ein regelmäſsiges Fünfeck (Achteck, Zwölfeck), dessen Seite s ist, sich um die Mittelsenkrechte einer Seite dreht, wie groſs ist die Oberfläche und der Inhalt des Körpers, welcher hierdurch entsteht? $\left(\text{Antw.: } \frac{4}{3}\pi s^3 \cos\frac{R}{5} \cos^4\frac{2R}{5}\right)$.

9. Die Fläche eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Katheten a und b sind, weniger der des einbeschriebenen Quadrates, von dem a) nur eine Ecke, b) eine Seite auf der Hypotenuse liegt, drehe sich bei a) um die Kathete a, bei b) um die Hypotenuse als Axe. Wie groſs sind Mäntel, Gesamtoberflächen und Inhalte der Körper?

10. Wie groſs ist das Gewicht (samt Belastung) einer Boje, die die Form zweier gleichen mit der Grundfläche aneinander stoſsenden Kegel hat, deren Axenschnitt ein rechtwinkeliges Dreieck ist mit der Kathete s dm, während die Boje so im Wasser schwimmt, daſs vom oberen Kegel $^2/_3$ der Höhe herausragt?

§ 24, 5, 6. **11.** Wie viele Kubikmeter enthält ein Schotterhaufen mit rechteckiger Grundfläche von der Länge 3 m und Breite 50 cm, dessen Seitenflächen oben in eine Längslinie von 2 m zusammenlaufen, während die Seitenkante 87 cm lang ist?

12. Wie groſs ist der Dachraum eines Hauses, dessen Boden a m lang, b m breit ist, wenn von den vier Bodenkanten die vier

Dachflächen unter 45° gegen die Bodenfläche geneigt bis zu der Höhe h über dem Dachboden aufsteigen? [§ 24, 5, 6.]

13. Wie viele Kubikmeter Erde erfordert ein Damm von der Länge l und der Höhe h, der oben die Breite b hat und beiderseits sowie an seinen Enden Böschungen von 60° Neigung besitzt?

14. Wie viele Kubikmeter Erde sind erforderlich, um auf diesen Damm einen Weg von der gleichen Breite und den gleichen Böschungen zur Seite anzulegen, der 15 % Steigung erhalten soll?

15. Berechne die Inhalte der Körper von IV, 33 und 34 (S. 152).

16. Ein regelmäfsiges dreiseitiges Prisma werde von einer Ebene geschnitten, welche einer Grundkante a parallel ist und mit der Grundfläche den Winkel α macht. Wie grofs ist die Oberfläche und der Inhalt des abgeschnittenen Körpers, wenn die kürzere Seitenkante $= b$ ist?

17. Ein gerades Prisma, dessen Grundfläche eine Raute ist, sei schief abgeschnitten durch eine Ebene, die parallel der kleineren Eckenlinie a der Raute ist. Die gröfsere Eckenlinie sei $= b$, die kürzeste Seitenkante c, die längste d. Wie grofs ist der Inhalt?

18. Wie grofs ist der Rauminhalt eines cylindrischen Kohleneimers, der schräg abgeschnitten ist unter einem Winkel von 45° gegen die längste Seitenlinie, wenn der Halbmesser $= r$ und die kürzeste Seitenlinie $= a$ dm ist?

19. Ein Grabstein besteht aus einem würfelförmigen Sockel, dessen Kanten $= a$ dm sind, und einem geraden, schief abgeschnittenen Cylinder, dessen obere Fläche gegen die Grundfläche um 60° geneigt ist. Der Durchmesser des Cylinders ist $^3/_4$ der Würfelkante und die kürzeste Seitenkante das Doppelte der Würfelkante. Wieviel wiegt der Körper, wenn sein spez. Gewicht s ist? Was kostet die Politur des Steins, wenn der Quadratdecimeter mit p Pfennigen berechnet wird?

20. Ein Prismatoid, d. i. ein Körper, der begrenzt ist von zwei in parallelen Ebenen liegenden Vielecken und von den Dreiecken, die je eine Seite des einen Vielecks mit einer benachbarten Ecke des andern verbinden (oder von den Trapezen zweier benachbarten parallelen Seiten der Vielecke), werde von einem Punkt der Mittelparallelebene aus in Pyramiden zerlegt, welche die Begrenzungsflächen des Körpers als Grundflächen haben. Es ist nachzuweisen: a) Schneidet eine der dreiseitigen Pyramiden aus der Mittelparallelebene eine Fläche f aus, so ist ihr Inhalt $^2/_3 fh$, wenn h der Abstand der parallelen Ebenen ist. (Der Inhalt ist das Vierfache der von f und der gegenüberliegenden Ecke begrenzten Pyramide.) b) Sind G, g, m die Grundflächen und Mittelfläche, h der Abstand der ersteren, so ist der Inhalt des ganzen Körpers: $\frac{h}{6}(G + g + 4m)$.

XI.

Aufgaben zum Inhalt der Kugel und Kugelteile.

§ 25. Kugel.

1. Welchen Inhalt hat eine Kugel, deren a) Halbmesser r (= 4,5 mm), b) Hauptkreisumfang u (= 14,7 cm), c) Oberfläche o (= 200 qdm) ist? — Welches Gewicht haben diese Kugeln, wenn sie bei a) aus Tannenholz (sp. G. = 0,5), bei b) aus Eisen (sp. G. = 7,25), bei c) aus Kalkstein (sp. G. = 2,72) bestehen?

2. Welchen Halbmesser und welche Oberfläche hat eine Kugel, deren Inhalt a) 1400 kbcm, b) I, c) $\frac{4a}{\sqrt{\pi}}$ beträgt?

3. Wie grofs ist der lichte Durchmesser des Laufes einer Kanone, deren kugelförmiges eisernes Vollgeschofs 6 kg wiegt? (Spez. Gew. = 7,25.)

4. In welchem Verhältnis stehen die Durchmesser zweier Kugeln von einerlei Stoff, von denen die eine doppelt soviel wiegt als die andere?

5. Wie verhalten sich Kegel, Kugel und Cylinder von gleichem Halbmesser und gleicher Höhe? (Grabmal des Archimedes.)

6. Erde, Sonne und Mond mögen als Kugeln betrachtet werden und ihre Halbmesser seien r, $108\,r$, $0{,}27\,r$; der Abstand der Mitte von Mond und Erde sei $= 60\,r$. Es fragt sich: a) Wie viele Erdkugeln liefsen sich aus der Sonne bilden? b) Wie viele Erde und Mond einhüllend berührende Kugeln liefsen sich aus der Sonne bilden?

7. Aus drei eisernen Kugeln, deren Halbmesser r_1, r_2, r_3 sind (z. B. 5, 8, 12 cm), wird eine einzige gegossen. Welchen Durchmesser und welches Gewicht hat diese? (Sp. G. = 7,25.)

8. Wie viele Bleikugeln von 12 mm Durchmesser lassen sich aus a (z. B. 30) kg Blei (sp. G. = 11,4) giefsen?

9. Welchen Halbmesser mufs eine kupferne Hohlkugel (spez. G. = 8,9) mindestens haben, damit sie, bei 1 cm Wanddicke ganz untergetaucht, im Wasser schwimmt?

10. In einem mit der Spitze abwärts gekehrten geraden Kegel, dessen Axe lotrecht und dessen Axenschnittwinkel 2α sei, befinde sich Wasser von der Tiefe h. In dieses werde eine Kugel vom Halbmesser r ganz untergetaucht. Wie hoch steigt das Wasser?

11. Wie verhalten sich die Oberflächen und Inhalte der in VI, 43 angegebenen Körper zu denen der ein- und umbeschriebenen Kugeln?

12. Wie verhalten sich die Inhalte der fünf Körper in VII, 12?

Kugelabschnitt.

13. Zu welcher Kugel gehört ein Segment, dessen Inhalt Σ (0,223 kbm) und dessen Höhe h (6,3 cm) ist?

14. Dieselbe Aufg. wie VII, 13, wenn der Inhalt halbiert sei.

15. Dieselbe Aufg. wie VII, 14 für den Inhalt der Kugelteile.

16. In welchem Verhältnis werden Oberfläche und Inhalt einer

Kugel geteilt, wenn die Teilung durch die Ebene einer Fläche des einbeschriebenen a) Würfels, b) regelmäfsigen Tetraëders besorgt wird? [§ 25.]

17. Ein Kessel soll hergestellt werden, welcher v Hektoliter fafst und die Form eines Kugelabschnittes hat der Art, dafs der Durchmesser des obern Begrenzungskreises gleich der Entfernung des Randes vom tiefsten Punkte sei. a) Wie grofs mufs diese Entfernung sein, b) wie grofs der Kugelhalbmesser und c) wieviel Quadratdecimeter Kupferblech sind für den Kessel erforderlich?

18. Eine bikonvexe Glaslinse, deren Flächen die gleiche Krümmung haben, hat einen Durchmesser von 9 cm und in der Mitte eine Dicke von 10 mm. a) Wie grofs ist der Halbmesser der Flächen? und b) wie schwer ist die Linse, wenn das spezifische Gewicht des Glases 2,6 ist?

19. Ein Schälchen, dessen Hohlraum die Gestalt eines Kugelabschnittes hat und 12 mm tief ist, läfst sich mit 98 g Quecksilber (spez. Gew. = 13,6) füllen. Wie grofs ist dessen Oberfläche?

20. Welchen Inhalt hat ein Abschnitt einer Kugel, wenn jener die Oberfläche a^2 (= 42 qcm) und diese die Oberfläche b^2 (= 0,7 qdm) hat?

21. Eine Kugel mit dem Halbmesser r liegt in einem mit der Spitze nach unten gerichteten Kegel, dessen Axenschnittwinkel 2α ist. Wie grofs ist der Hohlraum zwischen Kugel und Kegel?

22. Wie grofs ist das spez. Gewicht des Ahornholzes, wenn eine Kugel aus diesem Holze von 10 cm Durchmesser so auf Wasser schwimmt, dafs die Höhe des herausragenden Teiles 4 cm beträgt?

23. Eine Kugelschale von 6 cm Höhe und 20 cm äufserem Durchmesser am obern Rand wiegt 55,6 g. Wie viele Gramm kann man höchstens in sie hineinlegen, damit sie noch mit dem Rande am Wasserspiegel schwimmt?

24. a) Wie viele Gramm wiegt eine eiserne, halbkugelförmige Schale, deren äufserer Halbmesser 5 cm und deren Wandstärke 0,1 cm beträgt, wenn das spez. Gewicht des Eisens 7,25 ist? b) Wie viele Gramm mufs man in diese Schale legen, damit sie auf dem Wasser schwimmend noch 1 cm hoch herausragt? (Das Gewicht der Luft bleibt unberücksichtigt.)

25. Zu dem Abschnitt der Kugel, deren Halbmesser $= r$ ist, gehöre der Mittelpunktswinkel 2α; es ist zu berechnen und in Form eines Produktes anzugeben, um wieviel a) die Fläche der Haube den Mantel, b) der Inhalt des Abschnittes den Inhalt des eingeschriebenen geraden Kegels übertrifft.

26. Man soll den Inhalt eines Kugelausschnittes bestimmen, von welchem gegeben ist: a) der Halbmesser ϱ des begrenzenden Kreises und dessen Abstand h_1 vom Mittelpunkt; b) der Mittelpunktswinkel 2α und die Fläche f der zugehörigen Haube; c) der Kugelhalbmesser r und die Fläche f seines Axenschnittes. Kugelausschnitt.

[§ 25.] **27.** Ein Kreisausschnitt, dessen Kugelhalbmesser r und Mittelpunktswinkel 60^0 ist, drehe sich zuerst um die Winkelhalbierende und dann auch um einen seiner begrenzenden Halbmesser. Wie grofs sind die entstehenden Ausschnitte? und ihr Verhältnis?

28. Wie grofs ist die Höhe eines Kugelabschnittes, der halb so grofs ist als der Kugelausschnitt, zu dem er gehört? (Der Kugelhalbmesser sei $= r$.)

29. Der Inhalt einer Kugel ist K, der eines Ausschnittes S. Wie grofs ist der Mittelpunktswinkel des Ausschnittes? $S = \frac{1}{4} K$.

30. Wie grofs ist der Mittelpunktswinkel eines Kugelausschnittes, dessen Abschnitt ebenso grofs ist wie sein kegelförmiger Teil?

31. Die Höhe einer Kugelhaube sei h, der Halbmesser ihres Begrenzungskreises $2h$. Es ist nachzuweisen: a) die Haube ist fünfmal so grofs als die Oberfläche einer Kugel, deren Durchmesser $= h$ ist; b) der Inhalt des Abschnittes ist 13mal so grofs als der dieser Kugel; c) der Inhalt des zugehörigen Ausschnittes ist 25mal so grofs, als der derselben Kugel; d) der kegelförmige Mantel des Ausschnittes ist gleich der Haube; e) die abgerollte Mantelfläche bildet einen Kreisausschnitt, dessen Mittelpunktswinkel $= 3\frac{1}{5} R$ ist.

32. Eine Kugel soll kegelförmig ausgebohrt werden, so dafs die Axe des Kegels durch den Mittelpunkt geht, seine Spitze in die Oberfläche der Kugel fällt und der übrig bleibende Kugelteil die Hälfte des Kugelinhaltes ist. Es soll durch Rechnung und dann durch Zeichnung die Höhe des übrig bleibenden Kugelteils bestimmt werden, wenn der Kugelhalbmesser r gegeben ist.

33. Wie grofs ist der Körperinhalt eines zu dem Kugelzweieck mit dem Winkel α und dem Halbmesser r gehörigen Kugelteiles?

34. Wie grofs ist der Körper, der aus einer Kugel mit dem Halbmesser r von drei durch den Mittelpunkt gelegten Ebenen ausgeschnitten wird, wenn die Ebenen die Winkel α, β, γ bilden? (Benütze S. 57, 4.)

35. Aus den Ecken eines regelmäfsigen Tetraëders mit der Seite s werden Kugeln mit dem Durchmesser s beschrieben. Wieviel übertrifft der Inhalt des Tetraëders den der in ihm liegenden Kugelteile?

Kugelschicht. **36.** Welchen Körperinhalt hat eine Kugelschicht, von welcher der Kugelhalbmesser r und die Halbmesser ϱ_1 und ϱ_2 der beiden Grundflächen bekannt sind? — Beispiel: $r = 1{,}2$; $\varrho_1 = 0{,}8$; $\varrho_2 = 0{,}6$.

37. In einem gleichschenkeligen Trapez seien die parallelen Seiten $2a$ und $2b$ $(a > b)$, die schiefe Seite sei c und ein spitzer Winkel sei δ. Nun drehe sich die Figur und ihr umgeschriebener Kreis um die Mittelsenkrechte zu den Parallelseiten. Wie grofs ist die entstehende Kugelschicht, falls gegeben sind: a) a, b, c; b) a, c, δ; c) b, c, δ; d) $2a - 2b = d$ und δ.

38. Eine Kugel werde kegelförmig ausgebohrt, so dafs die Axe des Kegels durch den Kugelmittelpunkt geht; der entstehende ringartige Körper habe die Höhe h und Begrenzungskreise, deren Halbmesser ϱ_1 und ϱ_2 sind. Wie grofs ist der Inhalt dieses Körpers? [§ 25.]

39. Wie grofs ist der Inhalt dieses Ringes, wenn nur die Seitenstrecke s des herausgehobenen Kegelstumpfes und ihr Winkel α mit der Höhe gegeben ist?

40. Der Inhalt einer Kugelschicht ist gleich dem Inhalte eines Cylinders von der gleichen Höhe h und dem mittleren Halbmesser ϱ der Schicht, weniger der Halbkugel, deren Durchmesser gleich der Höhe h ist. $\left(\text{Andeutung: } \varrho_1^2 + \varrho_2^2 = 2\varrho^2 - \frac{h^2}{2}.\right)$

41. Wird eine Kugel cylindrisch ausgebohrt, so dafs die Axe des Cylinders durch den Kugelmittelpunkt geht, so bleibt ein Ring übrig, dessen Inhalt gleich dem einer Kugel ist, deren Durchmesser der Höhe des Ringes gleich kommt. — Solche Ringe aus verschiedenen Kugeln, aber mit gleicher Höhe sind Cavalierische Körper.

42. Zu einer Hohlkugelschicht ist Cavalierischer Körper ein Hohlcylinder von gleicher Höhe und mit den beiden Halbmessern der Kugelflächen.

43. Man leite nach Nr. 42 die Formel für einen Kugelabschnitt ab als Unterschied einer halben Hohlkugel, deren Halbmesser r und $(r - h)$ sind, und der Hohlkugelschicht in ihr von der Höhe $(r - h)$.

44. Ebenso die Formel der Kugelschicht als Summe einer Hohlkugelschicht, deren innere Fläche die obere Endfläche berührt, und des Kugelabschnittes innerhalb dieser Fläche.

XII.

Aufgaben zur Abbildung geradliniger Figuren.

1. Unter welcher Bedingung können die Punkte einer Geraden als Bilder aller Punkte einer Ebene betrachtet werden? § 29.

2. Unter welcher Bedingung werden die Ebenen eines Ebenenbüschels als Strahlenbüschel abgebildet?

3. Zwei parallele Gerade ergeben in einem Ebenenbüchel ähnlich liegende Punktreihen.

4. Zwei parallele Ebenen ergeben in einem Ebenenbüschel gleiche und gleichgerichtete Strahlenbüschel.

5. Die Schnittpunkte zweier Strahlen eines Punktes mit einem Ebenenbüschel bilden zwei perspektive Punktreihen, die gegenseitig

[§ 29.] bestrahlt liegen vom Schnittpunkt der Ebene beider Geraden mit dem Träger des Ebenenbüschels als Strahlpunkt.

6. Die Schnittgeraden zweier Ebenen mit einem Ebenenbüschel bilden zwei gegenseitig bestrahlte Strahlenbüschel, deren Axe die Schnittgerade ersterer Ebenen ist.

7. Irgend zwei gegenseitig bestrahlte Strahlenbüschel gehören einem Ebenenbüschel an, dessen Axe die Verbindungsgerade der beiden Scheitel ist.

8. In einem Ebenenbüschel ergeben die Schnittpunkte irgend welcher Geraden gegenseitig bestrahlte Gebilde; eben solche ergeben die Schnittgeraden irgend welcher Ebenen.

§ 31. **9.** Der Strahlpunkt S, die Fluchtgerade f und ein Punkt P mit seinem Bild P_1 sind gegeben; gesucht die Axe.

10. Der Strahlpunkt S und die beiden Fluchtgeraden f und v_1 sind gegeben; es soll zu einer Geraden g (oder zu einem Punkt P) das Bild gefunden werden.

11. Die Axe a, die Fluchtgerade f, ein Punkt P und sein Bild P_1 sind gegeben; gesucht der Strahlpunkt.

12. Zwei Geraden g und h und ihre Bilder g_1 und h_1 sind gegeben samt dem Fluchtpunkt F auf g; gesucht der Strahlpunkt.

§ 32. **13.** Ein gegebenes vollständiges Vierseit soll einmal so abgebildet werden, dafs eine äufsere Nebenseite Fluchtgerade wird, und dann so, dafs dies eine innere Nebenseite ist. Es ist aufzusuchen und in beiden Fällen zu vergleichen, a) für welche Punkte der Strahlpunkt die Strecke von Vorlage- und Bildpunkt aufsen und b) für welche er sie innen teilt, und c) welche Strecken auf den Geraden einander als Vorlage und Bild entsprechen.

14. Die verschiedenen Beweisverfahren sollen zusammengestellt werden, durch welche die Sätze § 29, 4 u. 4′ (S. 75/76) für Figuren einer einzigen Ebene begründet werden a) mit Hilfe von Streckenverhältnissen (II § 22); b) mit einer Abbildung, in der eine Gerade Fluchtgerade ist; c) mit Hilfe der Auffassung der Figur als Grenzlage bestrahlter Figuren zweier Ebenen (S. 79, 5).

15. Die folgenden Sätze sind auf verschiedene Arten zu beweisen:

a) Verbindet man einen Punkt P mit den Ecken eines Dreiecks ABC, so schneiden diese Geraden die Seiten des Dreiecks in drei Punkten $A_1 B_1 C_1$ eines Dreiecks, dessen Seiten die Gegenseiten des gegebenen Dreiecks in drei Punkten einer Geraden schneiden.

b) Schneidet eine Gerade p die Seiten eines Dreiseits a, b, c, so bilden die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte mit den Ecken ein zweites Dreiseit, dessen Ecken mit denen des ersteren auf drei Strahlen eines Punktes liegen.

[§ 32.]

16. a) Von einem Sechseck, dessen Ecken 1, 3, 5 auf einer Geraden liegen, und 2, 4, 6 auf einer zweiten Geraden, schneiden einander die Seiten 12 und 45, 23 und 56, 34 und 61 in drei Punkten einer Geraden.

b) Von einem Sechsseit, dessen Seiten 1, 3, 5 durch einen Punkt gehen, und 2, 4, 6 durch einen zweiten Punkt, gehen die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte 12 und 45, 23 und 56, 34 und 61 durch einen Punkt.

17. Die Aufgaben des II. Teiles IX, 9—15 und X, 10—17 schliefsen sich hier an.

18. In einem vollständigen Viereck $ABCD$ seien auf einem beliebigen Strahl der Nebenecke E der Seiten AB und CD zwei beliebige Punkte G und H angenommen, von denen der erstere mit den Ecken A und D durch die Geraden a_1, d_1, der letztere mit den Ecken B und C durch b_1, c_1 verbunden werde. Es ist zu beweisen, dafs die Schnittpunkte $a_1 b_1$ und $c_1 d_1$ auf einem Strahl der Nebenecke von AD und BC liegen.

(Mittels § 29, 4. Oder dadurch, dafs man zunächst den Strahl EHG aufserhalb der Ebene des Vierecks annimmt, und § 2, 1 benützt.)

18′. In einem vollständigen Vierseit $abcd$ seien durch einen beliebigen Punkt der Nebenseite e der Ecken ab und cd zwei beliebige Gerade g und h gezogen, von denen die erstere die Seiten a und d in den Punkten A_1, D_1, die letztere die Seiten b und c in B_1, C_1 schneiden möge. Es ist zu beweisen, dafs die Verbindungsgeraden $A_1 B_1$ und $C_1 D_1$ einander in einem Punkt der Nebenseite der Ecken ad und bc schneiden.

(Mittels § 29, 4′. Oder dadurch, dafs man zunächst annimmt, ab und cd seien zwei verschiedene Ebenen und § 2, 1 benützt.)

19. Bewegen sich zwei veränderliche Dreiecke so, dafs die Ecken in drei festen Strahlen eines Punktes hingleiten und zwei Seiten sich um zwei feste Punkte drehen, so dreht sich auch die dritte Seite um einen festen Punkt der Verbindungsgeraden der beiden andern festen Punkte.

19′. Bewegen sich zwei veränderliche Dreiseite so, dafs die Seiten sich um drei feste Punkte einer Geraden drehen und zwei Ecken auf zwei festen Geraden hingleiten, so gleitet auch die dritte Ecke auf einem festen Strahl des Schnittpunktes der beiden andern festen Geraden hin.

20. Aus diesen beiden Sätzen soll gefolgert werden:

a) Wenn zwei Punktreihen mit einer dritten bestrahlt liegen, so liegen sie untereinander ebenso, und die drei Strahlpunkte liegen auf einer Geraden.

a′) Wenn zwei Strahlenbüschel mit einem dritten bestrahlt liegen, so liegen sie untereinander ebenso, und die drei Axen gehen durch einen Punkt.

b) Bewegen sich die Ecken eines veränderlichen n-ecks in n festen Geraden, die durch einen Punkt

b′) Drehen sich die Seiten eines veränderlichen n-seits um n feste Punkte, die in einer Geraden liegen,

[§ 32.] gehen, und drehen sich $(n-1)$ seiner Seiten um ebensoviele feste Punkte, so drehen sich auch die übrigen $\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}$ Verbindungsgeraden der Ecken um andere feste Punkte.

und bewegen sich $(n-1)$ seiner Ecken in ebensoviel festen Geraden, so gleiten auch die übrigen $\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}$ Schnittpunkte der Seiten in andern festen Geraden hin.

XIII.

Aufgaben zur Abbildung des Kreises als Kreis.

(Die folgenden Aufgaben gelten auch für Kegelschnitte.)

§ 34. **1.** Zu einem gegebenen Kreis (Kegelschnitt) und einem gegebenen Punkt ist mit dem Lineal allein die Polare zu zeichnen.

2. Zu einem gegebenen Kreis (Kegelschnitt) und einer gegebenen Geraden ist mit dem Lineal allein der Pol zu bestimmen.

3. Der Satz: „In einem berührenden Dreiseit schneiden einander die Geraden von den Ecken nach den Berührungspunkten in einem Punkt“ ist zu beweisen: a) durch die Umkehrung des Satzes von Ceva (II, § 15, 5); b) durch Ableitung aus dem Satz von Brianchon; c) durch die Abbildung der Figur, so dafs a_1) ein Berührungspunkt oder b_1) zwei Berührungspunkte in unendliche Entfernung fallen.

4. Wie der vorhergehende Satz ist zu beweisen: Die Seiten eines Sehnendreiecks geben mit den jeweiligen Gegenseiten des zugehörigen Berührungsdreiseits drei Schnittpunkte auf einer Geraden.

5. In einem vollständigen Vierseit aus zwei Kreisberührenden und aus den beiden Verbindungsgeraden ihrer Berührungspunkte mit einem Punkt des Kreises geht die Berührende des letzteren Punktes durch den äufsern Schnittpunkt zweier Nebenseiten.

6. Verbindet man zwei Punkte des Kreises mit den beiden Berührungspunkten zweier Berührenden und verlängert diese vier Verbindungsgeraden bis zu ihren beiden weiteren Schnittpunkten, so liegen letztere auf einer Geraden mit dem Schnittpunkt der Berührenden. Es soll dies bewiesen werden a) mittels einer einfacheren Abbildung, b) mittels der Sätze über ein- und umbeschriebene Vierecke oder Sechsecke.

7. Verbindet man die Berührungspunkte zweier Berührenden mit je einem weitern Punkt des Kreises, so liegen die weitern Schnittpunkte dieser beiden Verbindungsgeraden und der Berührenden auf einer Geraden mit dem Schnittpunkt der Berührungssehne und der Geraden der beiden weitern Punkte. Beweis wie in der vorhergehenden Aufgabe.

8. Wenn bei einem Sehnenviereck zwei Gegenseiten auf der Berührungssehne zweier Berührenden (oder auf deren Verlängerung) eine Nebenecke bilden, so bestimmen zwei weitere Gegenseiten mit den beiden Berührenden ein Vierseit, bei dem zwei Nebenseiten einander in jener Nebenecke schneiden. [§ 34.]

9. Wenn ein Vierseit gebildet wird aus zwei Berührenden und zwei Schneidenden eines Kreises, die sich auf der Berührungssehne der ersteren (oder auf deren Verlängerung) schneiden, so bestimmen die nicht durch diesen Schnittpunkt gehenden Nebenseiten, wenn sie den Kreis treffen, ein Sehnenviereck, von dem eine Nebenecke in jenem Schnittpunkt liegt.

XIV.

Aufgaben über Punkte, berührende und schneidende Gerade der Kegelschnitte.

1. Ein Kreis mit dem Halbmesser von 1,5 cm ist so abzubilden, dafs die Axe den Abstand $MK = 2$ cm vom Mittelpunkt M hat und die Fluchtgerade FR den Abstand $MF = 3$ cm. Der Strahlpunkt S liegt so, dafs $\sphericalangle SFR = 45^0$ und $SF = 2$ cm. (Erstreckung des Bildes von M aus in Richtung MK beiderseits 5 cm, senkrecht dazu beiderseits gegen 9 cm.) a) Es ist das Bild von KF zu bestimmen; b) von einem Punkt V der Fluchtgeraden ($VF = 2$ cm, $SVF = 22\frac{1}{2}^0$) sind die beiden Berührenden an dem Kreis und deren Berührungssehne abzubilden. Welche Bedeutung hat der Schnittpunkt O dieser Berührungssehne mit KF und dessen Bild O_1? c) Die Berührenden an den Schnittpunkten von VO sind abzubilden. Welche Lage haben die Bilder in Bezug auf das Bild von VO und das Bild jener Berührungssehne? d) Von einer beliebigen Schneidenden durch V ist die Sehne abzubilden. Welche Beziehung hat das Bild zum Bild derselben Berührungssehne? e) Zu den Grenzpunkten der Sehne sind die gegengesetzten Punkte der Ellipse zu zeichnen. § 35.

2. Ein Kreis mit dem Halbmesser r ist so abzubilden, dafs der Strahlpunkt auf dem Umfang des Kreises liegt, die Axe den Kreis in diesem Punkt berührt und dafs der Abstand der Fluchtgeraden von der Axe a) $= 3r$; b) $= 2r$; c) $= \frac{3}{2}r$ wird.

3. Ein Kreis ist so abzubilden, dafs sein Mittelpunkt Strahlpunkt, ein Durchmesser Axe und eine parallele Berührende Fluchtgerade wird. Es ist nachzuweisen: a) der Kegelschnitt halbiert den zur Axe senkrechten Halbmesser; b) die zweite Fluchtgerade berührt den Kreis ebenfalls; c) jeder Punkt des Kegelschnittes ist vom Strahlpunkt und dieser Fluchtgeraden gleichweit entfernt; d) eine Berüh-

[§ 35.] rende halbiert den Winkel zwischen dem Halbmesser des Berührungspunktes und der Senkrechten zu dieser Fluchtgeraden.

4. Das Bild eines Kreises und des umbeschriebenen Quadrates, von dem ein Seitenpaar parallel der Bildaxe ist, sei eine Ellipse und ein Trapez, dessen parallele Seiten in der Mitte berührt werden. Die Berührungspunkte der nicht parallelen Seiten liegen auf der durch den Schnittpunkt der Eckenlinie gehenden Parallelen zu den parallelen Seiten. Trägt man je $\frac{1}{5}$ der parallelen Seiten von den Ecken her auf diese Seiten ab, und verbindet die benachbarten Teilpunkte, so geben die Verbindungsgeraden dort, wo sie die Verbindungsgeraden der Ecken mit den Berührungspunkten der nicht parallelen Seiten schneiden, vier weitere Punkte der Ellipse. (Nachweis des Verhältnisses 1 : 5 an der Vorlage.)

§ 36. **5.** Zwei beliebige (nicht zugeordnete) Durchmesser eines Kegelschnittes bestimmen durch ihre Grenzpunkte und deren Berührenden ein ein- und ein umbeschriebenes Parallelogramm. Die Eckenlinien des letzteren sind zugeordnete Durchmesser und zwar zugeordnet zu den Seiten des Sehnenparallelogramms; sie bilden mit den Eckenlinien des letzteren einen harmonischen Strahlenbüschel.

6. Zieht man in den Grenzpunkten eines Durchmessers und in einem Grenzpunkt einer zugeordneten Sehne Berührende und verbindet deren Schnittpunkte kreuzweis mit den Grenzpunkten des Durchmessers, so fällt der Schnittpunkt dieser Verbindungsgeraden in die Mitte der Hälfte jener Sehne.

7. Zwei beliebige Berührende bestimmen mit zwei parallelen Berührenden ein Vierseit, von welchem der Schnittpunkt zweier Nebenseiten auf denjenigen Durchmesser fällt, der den beiden Berührenden zugeordnet ist.

8. Die Aufgabe, einen beliebigen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen, die durch Gerade und Kreis allein nicht lösbar ist, wird auf folgende Weise mittels einer Hyperbel gelöst, deren Asymptoten senkrecht zu einander sind. Man trägt den Winkel so an, daſs er mit dem Asymptotenwinkel den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam hat; vom Schnittpunkt des andern Schenkels mit der Hyperbel trägt man den doppelten Scheitelabstand dieses Punktes als Sehne in die Hyperbel ein. Die Gerade vom Scheitel zur Mitte dieser Sehne teilt den Winkel im Verhältnis 1 : 2. Die Richtigkeit dieser Behauptung ist nachzuweisen. (Man beachte, daſs die Sehnenmitte von den Schnittpunkten der Sehne und Asymptoten ebensoweit entfernt ist, als vom Scheitel.)

§ 37. **9.** Von einem Kegelschnitt sind zwei parallele Berührende und deren Berührungspunkte gegeben, auſserdem a) ein Punkt oder b) eine Berührende. Es sollen noch weitere Punkte oder Berührende gezeichnet werden.

10. In ein gleichschenkeliges Trapez soll eine Ellipse gezeichnet werden, welche dessen vier Seiten berührt und zwar eine der parallelen in der Mitte. Es sind die andern Berührungspunkte zu bestimmen und noch ein beliebiger weiterer Punkt oder eine weitere Berührende. [§ 37.]

11. Von einer Ellipse sind drei Berührende und die Punkte auf zweien derselben gegeben, a) wenn diese sich schneiden, b) wenn sie parallel sind. Es soll die zur dritten Berührenden parallele Berührende gezeichnet und (im Falle a) der Mittelpunkt der Ellipse bestimmt werden. (Im Falle b liegt der Brianchonsche Punkt in unendlicher Entfernung oder im Mittelpunkt.)

12. Von einem Kegelschnitt sind vier Berührende und ein Punkt der (unbekannten) Berührungssehne von zweien derselben gegeben. Die Berührungspunkte sind zu bestimmen (S. 88, 2).

13. Von einem Kegelschnitt sind vier Punkte und eine Gerade durch den (unbekannten) Schnittpunkt der Berührenden zweier dieser Punkte gegeben. Diese Berührenden sind zu zeichnen (S. 88, 2).

14. Von einem Kegelschnitt ist ein Berührungsvierseit und ein Schnittpunkt einer Nebenseite desselben mit dem Kegelschnitt gegeben. Es ist die Berührende dieses Punktes zu bestimmen; ferner die Berührungspunkte des Berührungsvierseits.

15. Von einem Kegelschnitt ist ein Sehnenviereck und eine Berührende durch eine Nebenecke desselben gegeben. Man soll den Berührungspunkt dieser Berührenden bestimmen; ferner die Berührenden in den Ecken des Sehnenvierecks.

16. Von einer Hyperbel sind die beiden Asymptoten und ein Punkt (eine Berührende) gegeben. Nach dem Satz von Pascal (Brianchon) soll ein weiterer Punkt (eine Berührende) gefunden und aus der Zeichnung der Satz § 36, 6 c (d) S. 97 abgeleitet werden.

17. Von einer Parabel sind weitere Punkte oder Berührende zu bestimmen, wenn die Durchmesserrichtung gegeben ist und aufserdem a) vier Punkte, b) drei Punkte und die Berührende in einem, c) zwei Punkte und ihre Berührenden, d) vier Berührende, e) drei Berührende und auf einer ihr Berührungspunkt.

18. Dreht man die Seiten eines veränderlichen Dreiseits $QR6$ (S. 97, Fig. 99) um drei feste Punkte $P, 1, 5$, während zwei seiner Ecken Q und R auf zwei festen Geraden 23 und 34 hingleiten, so beschreibt die dritte Ecke 6 einen Kegelschnitt, der durch die Punkte 12345 geht.

19. Was wird aus dem Kegelschnitt des vorhergehenden Satzes, wenn die drei Drehpunkte auf einer Geraden liegen?

20. Gleiten die drei Ecken eines veränderlichen Dreiecks q, r, VI (S. 97, Fig. 100) auf den Geraden p, I, V hin, während zwei seiner Seiten q und r sich um zwei feste Punkte Q und R drehen, so be-

[§ 37.] schreibt die dritte Seite VI berührend einen Kegelschnitt, der von QR, I, V berührt wird (ebenso von QP und RP_1).

21. Wird ein Sehnenviereck im Kegelschnitt so bewegt, daſs es Sehnenviereck bleibt und daſs drei aufeinanderfolgende Seiten stets durch drei bestimmte Punkte gehen, die auf einer Geraden liegen, so dreht sich auch die vierte Seite um einen Punkt dieser Geraden. (Wiederholte Anwendung des Satzes von Pascal oder für den Fall, daſs die Gerade der drei Punkte den Kegelschnitt nicht schneidet, durch Abbildung als Kreis, § 38, 2.)

22. Zwei Kegelschnitte können einander höchstens in zwei Punkten berühren.

23. Zwei Kegelschnitte, die einander in einem Punkt berühren, können einander höchstens in zwei weitern Punkten schneiden.

XV.

Aufgaben über Bestrahlung der Kegelschnitte in einer Ebene.

§ 38. **1.** In Bezug auf einen Punkt als Strahlpunkt und seine Polare als Bildaxe ist ein Kegelschnitt sein eigenes bestrahltes Bild der Art, daſs die Schnittpunkte eines Strahles einander wechselseitig entsprechen. — Was folgt hieraus in Bezug auf die Berührenden in zwei wechselseitig entsprechenden Punkten? — Welche Teile entsprechen einander, wenn der Strahlpunkt a) Mittelpunkt ist, b) in gegebener Richtung in unendliche Entfernung fällt? — Welche Sätze des § 36 lassen sich hieraus ableiten?

2. Zwei Kegelschnitte, die sich in zwei Punkten berühren, liegen bestrahlt von einem Berührungspunkt als Strahlpunkt und zu der Berührenden im andern Punkt als Bildaxe.

3. Zwei Kegelschnitte einer Ebene, die sich in einem Punkt berühren, liegen bestrahlt von diesem Punkt als Strahlpunkt. — Wie findet man die Bildaxe, wenn beide Kegelschnitte sich a) in zwei Punkten schneiden, oder b) nur in einem Punkt, oder c) gar nicht schneiden?

4. Alle Parabeln sind einander ähnlich; sie liegen ähnlich, wenn sie einander in einem Punkt berühren und ihre Durchmesser parallel sind.

5. Wird ein Winkel, dessen Scheitel auf einem Kegelschnitt liegt, um diesen Scheitel gedreht, ohne seine Gröſse zu ändern, so bestimmen die Schnittpunkte seiner Schenkel mit dem Kegelschnitt eine Sehne, die berührend einen zweiten Kegelschnitt beschreibt.

(Man nehme noch einen den Kegelschnitt im Scheitel des Winkels berührenden Kreis als bestrahlte Figur zu Hilfe.) [§ 38.]

6. Zeichnet man zu den Grenzpunkten eines Durchmessers und zu den Grenzpunkten jeder zugeordneten Sehne je ein Sehnenviereck, so ist der Ort aller äufsern Nebenecken ein zweiter Kegelschnitt, der den ersteren an den Grenzpunkten des Durchmessers berührt. (Ein Grenzpunkt ist Strahlpunkt, die Berührende im andern Bildaxe.)

7. Von einem Kegelschnitt sind weitere Stücke zu zeichnen, wenn von ihm gegeben sind:

a) drei Punkte und irgend zwei Berührende (mittels eines Kreises, der beide Geraden berührt und von den Strahlen ihres Schnittpunktes nach den drei Punkten geschnitten wird);

b) vier Punkte und eine Berührende. (Zeichnet man das Viereck der vier Punkte und bestimmt den Schnittpunkt der Berührenden mit der Verbindungsgeraden der äufseren Nebenecken, so erhält man die zweite Berührende dieses Punktes als harmonischen Strahl mit der ersten Berührenden und der Verbindungsgeraden der Nebenecken, § 33, 6a.)

a′) drei Berührende und irgend zwei Punkte (mittels eines Kreises, der durch beide Punkte geht, während die Gerade durch diese Punkte aufserhalb der Kreisfläche von den Berührenden geschnitten wird);

b′) vier Berührende und ein Punkt. (Von dem Vierseit der vier Berührenden wird der innere Schnittpunkt der Nebenseiten mit dem Punkt verbunden; man erhält den zweiten Schnittpunkt dieser Geraden als harmonischen Punkt mit dem ersten Punkt und den Schnittpunkten der Nebenseiten, § 33, 4a.)

8. Wenn in einem Kegelschnitt ein Dreieck so bewegt wird, dafs seine Ecken stets auf dem Kegelschnitt bleiben, während zwei seiner Seiten sich um zwei feste Punkte drehen, so beschreibt die dritte Seite berührend einen zweiten Kegelschnitt, der von ersterem bestrahlt ist in Bezug auf die Verbindungsgerade der beiden Punkte als Bildaxe und deren Pol als Strahlpunkt. § 39, 1.

9. Wenn ein Punkt auf einem Kegelschnitt hingleitet, während er mit zwei festen Punkten desselben durch zwei Gerade verbunden ist, so beschreibt die Verbindungsgerade der Punkte, in welchen diese beiden Geraden die Berührenden der festen Punkte schneiden, berührend

9′. Wenn eine Gerade auf einem Kegelschnitt berührend hingleitet, während sie zwei feste Berührende desselben in zwei Punkten schneidet, so beschreibt der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden dieser Punkte mit den Berührungspunkten der festen Berührenden

einen zweiten Kegelschnitt, der ein bestrahltes Bild des ersteren ist mit dem Schnittpunkt der genannten Berührenden als Strahlpunkt und mit dessen Berührungssehne als Axe.

[§ 39, 1.] Die erzeugende Verbindungsgerade ist stets das Bild der Berührenden des gleitenden Punktes. | Der erzeugende Schnittpunkt ist stets das Bild des Berührungspunktes der gleitenden Berührenden. (Bildet man die Figur so ab, daſs beide feste Punkte in unendliche Entfernung fallen, so ergeben sich ähnlich liegende Hyperbeln.)

XVI.

Aufgaben über Axen, Brennpunkte und Leitgeraden.

§ 39, 2–6. **1.** Die Strecke zwischen den Brennpunkten eines Kegelschnittes wird durch die Berührende eines Punktes und deren Senkrechte von diesem Punkt aus harmonisch geteilt (im Verhältnis der Fahrstrahlen).

2. In einer Parabel ist der Schnittpunkt der Axe mit der Berührenden eines Punktes (und ihrer Senkrechten in diesem Punkt) ebensoweit von dem Brennpunkt entfernt, als der Punkt selbst.

3. Beschreibt man um einen Brennpunkt einer Ellipse einen Kreis mit der groſsen Axe $2a$ als Halbmesser, so erhält man die Berührende eines Punktes auf einem Halbmesser dieses Kreises, indem man den Abstand seines Endpunktes von dem andern Brennpunkt senkrecht halbiert.

4. Der Ort der Mittelpunkte der Kreise, die durch einen Punkt gehen und eine Gerade berühren, ist die Parabel, deren Brennpunkt der gegebene Punkt und deren Leitgerade die gegebene Gerade ist. (Vgl. Teil I § 34, 3.)

5. Der Ort der Mittelpunkte der Kreise, die durch einen Punkt gehen und einen Kreis berühren, ist ein Kegelschnitt, dessen Brennpunkte der gegebene Punkt und der Kreismittelpunkt sind und dessen Hauptaxe der Halbmesser des gegebenen Kreises ist. Bei welcher Lage des Punktes und Kreises ist der Kegelschnitt eine Ellipse, eine Hyperbel? Wie unterscheiden sich im Fall der Hyperbel die beiden Hyperbeläste in Bezug auf die Art der Berührung? Wie erhält man die Asymptoten?

6. Welches ist der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die eine Gerade und einen Kreis berühren, ferner der Kreise, welche zwei Kreise berühren? — Unterscheidung zwischen der Lage der Ähnlichkeitspunkte innerhalb oder auſserhalb des Kreises, sowie zwischen gleichartiger und ungleichartiger Berührung durch den Kreis.

7. Von einer Ellipse seien S und S_1 die Scheitel, F und F_1 die Brennpunkte, O der Mittelpunkt, T ein Punkt auf der Ellipse, t die Berührende in diesem Punkt, T_1 der zweite Schnittpunkt von FT mit der Ellipse, t_1 die Berührende dieses Punktes, l die Leitgerade zu F.

Es ist gegeben:	es wird gesucht:	[§ 39, 2–6.]
a) FF_1T;	tS_1.	
b) FTt und Axe $= 2a$;	F_1SS_1.	
c) FF_1t;	TSS_1.	
d) SS_1t;	FF_1T.	
e) SS_1F u. Fahrstrahlrichtg (TT_1);	TT_1.	
f) TT_1tt_1;	FF_1.	
g) SS_1F und Gerade g;	$t \parallel g$.	
h) FTT_1t;	F_1.	
i) FTl;	t.	
k) Ftl;	T.	
l) FTt und Axenrichtung;	l.	
m) FSt;	O.	
n) FSl;	T im Abstand r von F.	

8. Von einer Parabel ist ein Brennpunkt, ein Punkt und seine Berührende gegeben; gesucht die Richtung der Axe, die Leitgerade und der Scheitel.

9. Von einem Kegelschnitt sind drei Punkte gegeben und ein Brennpunkt. Es sollen die Axen bestimmt werden (mit Hilfe eines Kreises um den Brennpunkt). § 39, 7.

10. Dieselben Stücke sind zu bestimmen, wenn aufser dem Brennpunkt drei Berührende gegeben sind. (Benütze Teil I, Aufgabe XVI, 4 r und XVII, 6.)

11. Von einem Kegelschnitt ist ein Brennpunkt, die zugehörige Leitgerade und die Excentricität gegeben. Es sollen die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit einer gegebenen Geraden bestimmt werden (siehe Teil II § 14, 2 d oder Teil III § 39, 7).

12. Von einem Kegelschnitt sind gegeben ein Brennpunkt, zwei Berührende und auf einer ihr Berührungspunkt; gesucht werden der Berührungspunkt auf der andern und die Scheitel.

13. Von einem Kegelschnitt sind gegeben ein Brennpunkt, eine Berührende und ihr Berührungspunkt, sowie ein weiterer Punkt; gesucht wird die Berührende des letztern und die Leitgerade.

14. Von einem Kegelschnitt sind ein Brennpunkt, zwei Punkte und eine Berührende gegeben. Es sollen die zugehörigen Berührenden und der Berührungspunkt bestimmt werden. (Als dritter abzubildender Punkt dient der Schnittpunkt der Geraden durch beide Punkte mit der Berührenden.)

15. Von einem Kegelschnitt sind ein Brennpunkt, zwei Berührende und ein Punkt P gegeben, gesucht die Berührungspunkte der ersteren und die Berührende des letzteren. (Man bestimme den Pol des Strahls nach dem Schnittpunkt der Berührenden durch ein harmonisches Büschel dieses Punktes, und bestimme das Bild des Poles in

[§ 39, 7.] unendlicher Entfernung; hierauf die Gerade zwischen Punkt und Pol und ihr Bild und deren Schnittpunkte mit einer Berührenden.)

16. In einem Kegelschnitt wird einer der Winkel der Strahlen vom Brennpunkt nach den Grenzpunkten einer Sehne durch den Strahl nach dem Schnittpunkt der zugehörigen Berührenden halbiert. Der andere Winkel beider erstgenannten Strahlen wird durch den Strahl nach dem Schnittpunkt der Sehne mit der Polare des Brennpunktes halbiert. Die Sehne selbst wird durch die Strahlen harmonisch geteilt im Verhältnis der Fahrstrahlen nach den Grenzpunkten der Sehne. (Man beweise mit Hilfe eines Kreises um den Brennpunkt.)

17. Der Schnittpunkt zweier Berührenden ist von den vier Fahrstrahlen der Berührungspunkte gleichweit entfernt.

18. Die Strahlen vom Schnittpunkt zweier Berührenden nach den beiden Brennpunkten bilden mit den benachbarten Berührenden oder mit der Halbierenden des Winkels der Berührenden gleiche Winkel.

19. Gleitet eine Berührende an einem Kegelschnitt hin, während sie stets zwei feste Berührende schneidet, so erscheint ihre von den festen Berührenden begrenzte Strecke vom Brennpunkt aus unter unveränderlichem Winkel, so lange nicht ein Schnittpunkt in unendliche Entfernung fällt; nach diesem Übergang tritt an die Stelle des Winkels sein Nebenwinkel, an Stelle des Halbstrahls dessen Gegenstrahl. Der Winkel ist hierbei stets gleich der Hälfte des (spitzen oder stumpfen) Winkels der Halbstrahlen vom Brennpunkt nach den Berührungspunkten der festen Berührenden.

20. Bei der Parabel ergänzt der Winkel der Strahlen vom Brennpunkt nach den Schnittpunkten der beweglichen mit zwei festen Berührenden den Winkel der letztern zu $2R$. (Man benütze den Winkel der Fahrstrahlen nach dem Schnittpunkte der festen Berührenden und der unendlich fernen Berührenden.)

21. Wie ist der Satz in 18 für die Parabel abzuändern?

22. Beschreibt man um ein Berührungsdreiseit einer Parabel einen Kreis, so geht dieser durch den Brennpunkt (20).

23. Von allen Parabeln, welche von einem Dreieck eine Seite und die Verlängerungen der beiden andern berühren, liegen die Brennpunkte auf dem umbeschriebenen Kreis (20).

24. In einer Hyperbel liegen die Schnittpunkte einer Berührenden mit den Asymptoten auf einem Kreis mit den Brennpunkten.

25. Wenn ein unveränderlicher Winkel so bewegt wird, daſs ein Schenkel stets durch einen bestimmten Punkt geht, während sein Scheitel auf der ursprünglichen Lage des andern Schenkels weiter gleitet, so beschreibt der zweite Schenkel berührend eine Parabel, von welcher der ursprüngliche Scheitel ein Punkt ist und der Drehpunkt des Schenkels der Brennpunkt. (Benütze den Satz in Aufg. 23 zur Winkelbestimmung.)

26. Die Strahlen vom Brennpunkt nach den Schnittpunkten [§ 39, 7.] einer beliebigen Berührenden mit den Scheitelberührenden eines Kegelschnittes sind zu einander senkrecht.

27. Es wird in einen Kegelschnitt ein Sehnenviereck gezeichnet, von welchem eine Nebenecke in den Brennpunkt fällt; ferner das zugehörige Berührungsvierseit. Es ist zu beweisen: a) die Nebenseiten des letzteren, welche durch den Brennpunkt gehen, stehen aufeinander senkrecht; b) dieselben halbieren die Winkel der durch den Brennpunkt gehenden Seiten des Sehnenvierecks; c) ebenso die Winkel der Strahlen vom Brennpunkt nach den andern Schnittpunkten der Nebenseiten des Berührungsvierseits.

28. In einer Ellipse ist die halbe Summe der beiden Winkel, unter welchen eine Sehne von beiden Brennpunkten aus gesehen wird, gleich dem Nebenwinkel des Berührungswinkels.

29. In einer Ellipse ist die Summe der beiden Winkel der Strahlen von den Brennpunkten nach den Schnittpunkten einer beweglichen mit zwei festen Berührenden unveränderlich, nämlich gleich dem Nebenwinkel des Winkels der letztern.

30. Bei der Hyperbel ist in beiden vorangehenden Sätzen Unterschied der Winkel statt Summe zu setzen. Wie ist es bei der Parabel, wie beim Kreis?

31. Welche Sätze ergeben sich aus Satz 29, wenn die festen Berührenden zu einander parallel oder senkrecht sind?

32. In einer Ellipse beträgt die Summe gewisser vier Winkel $2R$, nämlich der beiden Winkel, unter welchen von beiden Brennpunkten aus ein Abschnitt der Berührenden, gemessen vom Berührungspunkt bis zu einem beliebigen Punkt der Berührenden, gesehen wird, und der beiden Winkel, unter welchen von letzterm Punkt die beiden Fahrstrahlen des Berührungspunktes erscheinen. (Zum Beweis sind blos S. 107, 4 b und die Sätze von den Winkeln des Dreiecks zu benutzen.)

33. Dreht man einen unveränderlichen Winkel um einen Brennpunkt eines Kegelschnittes als Scheitel, so beschreibt der Schnittpunkt der Berührenden, welche zur Sehne des Winkels gehören, einen Kegelschnitt, der mit ersterem den Brennpunkt und dessen Polare gemeinsam hat, während die Sehne selbst berührend einen eben solchen dritten Kegelschnitt einhüllt. Der Schnittpunkt der Berührenden und der Berührungspunkt der Sehne liegen auf dem Strahl des Brennpunktes, der den unveränderlichen Winkel halbiert.

34. Der Ort der Schnittpunkte der Halbmesser zweier Kreise nach Wechselpunkten (siehe Aufg. V, 15) ist ein Kegelschnitt (vgl. Aufg. XVI, 6), welcher mit jedem der Kreise bestrahlt liegt in Bezug auf den Mittelpunkt des Kreises als Strahlpunkt und die Potenzgerade als Axe. (Die Winkelhalbierende der Fahrstrahlen in einem

[§ 39, 7.] Punkt des Kegelschnittes geht durch den Schnittpunkt der Berührenden der beiden Wechselpunkte.) Der Kegelschnitt ist eine Ellipse, wenn der Ä.-Punkt innerhalb beider Kreise liegt, eine Hyperbel, wenn er aufserhalb liegt, eine Parabel, wenn er auf einem Kreise liegt, d. h. wenn für den andern Kreis eine Gerade genommen ist.

XVII.

Aufgaben über Gleichungen der Kegelschnitte.

§ 41. **1.** Legt man durch zwei Punkte A und B eines Kegelschnittes zwei Kreise, die mit dem Kegelschnitt noch je eine weitere Sehne PL und P_1L_1 gemeinsam haben, so liegen auch die Punkte PLP_1L_1 auf einem Kreis. (S. 114, 1 und Satz vom Zweistrahl im Kreis.)

2. Die Gleichungen der Ellipse und Hyperbel in Bezug auf die Hauptaxen als Koordinatenaxen sind aus § 39, 4c abzuleiten, ebenso die der Parabel aus § 39, 5c.

3. Das Produkt der Strecken, die eine beliebige Berührende auf zwei parallelen Berührenden abschneidet, ist unveränderlich, gleich dem Quadrat der kleinen Axe in der Ellipse. (Vgl. Aufg. XIV, 7, S. 180.)

4. Aus dem vorangehenden Satze und dem in Aufg. XIV, 6, S. 180 soll die Gleichung der Ellipse abgeleitet werden.

5. Es sollen in den Gleichungen: $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ oder $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ für x beliebige Werte angenommen und daraus die Werte von y bestimmt werden; hiernach soll die Gestalt der Kurve (Ausdehnung in Richtung der Axe, Nachweis von Mittellinien u. s. w.) ermittelt werden.

6. Wenn eine Ellipse und ein Kreis einen gemeinsamen Durchmesser haben, so verhält sich die Kreishalbsehne irgend eines Durchmesserpunktes zu der zugehörigen Halbsehne der Ellipse wie der Durchmesser zum zugeordneten.

7. Es soll die Richtigkeit folgender Ellipsenzeichnungen nachgewiesen werden:

a) Man zeichnet um einen Punkt zwei Kreise, von denen zwei zu einander senkrechte Durchmesser die grofse und kleine Axe der Ellipse darstellen. Durch den Endpunkt eines Halbmessers des kleineren Kreises zieht man eine Parallele zum Durchmesser des gröfseren und durch den Endpunkt des entsprechenden Halbmessers des gröfseren Kreises eine Parallele zum Durchmesser des kleineren. Der Schnittpunkt beider Geraden ist ein Punkt der Ellipse.

b) Bewegt man eine Gerade mit drei bestimmten Punkten der-

selben der Art, dafs zwei der Punkte auf den Schenkeln eines R hingleiten, so beschreibt der dritte Punkt eine Ellipse, dessen Axen die Abstände des dritten Punktes von den beiden andern sind (Leonardo da Vinci, um 1490). [§ 41.]

c) Man zeichnet in beliebigen Punkten eines Kreisdurchmessers die Halbsehnen und trägt diese von ihren Fufspunkten in beliebiger anderer Richtung zu einander parallel an.

d) Man trägt die grofse und kleine Axe auf eine Gerade aneinander an, teilt beide Strecken in gleichviele Teile, beschreibt um die kleine Axe als Durchmesser einen Kreis und überträgt die Halbsehnen der Teilpunkte des Durchmessers als Halbsehnen an die entsprechenden Teilpunkte der grofsen Axe.

e) Zu zwei zugeordneten Halbmessern MA und MC einer Ellipse erhält man weitere Punkte auf folgende Weise. Man beschreibt um M mit MA als Halbmesser einen Kreis, zieht in diesem den Halbmesser $MC_1 \perp MA$ und verbindet C mit C_1; zu irgend einem Punkt Q auf MA zieht man die Kreishalbsehnen QP_1 und $QP \parallel MC$. Dann wird QP von einer Geraden $P_1P \parallel CC_1$ in einem Punkt P der Ellipse geschnitten.

8. Um eine Ellipse zu zeichnen, von der zwei zugeordnete Halbmesser MA und MC gegeben sind, zeichne man das Parallelogramm $AMCO$, teile OC und CM in n gleiche Teile, von denen die ersteren von O aus, die letzteren von M aus numeriert werden. Der Strahl von A nach einem Punkt von OC schneidet den von dem andern Grenzpunkt B des Durchmessers AB nach dem gleich numerierten Punkt von MC gezogenen Strahl in einem Punkt der Ellipse.

9. Wie ist die Zeichnung der vorangehenden Aufgabe zu ändern, um eine Parabel oder eine Hyperbel zu erhalten?

10. Wenn von einem Kegelschnitt ein Durchmesser AB und eine zugeordnete Sehne CD gegeben ist, so werden auf folgende Weise weitere Punkte desselben gefunden. Man ziehe $CS \parallel AB$ und eine beliebige Parallele zu AD, die CS in M und CD in N schneidet. Dann ist der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden AM und BN ein Punkt des Kegelschnittes. Dies ist nachzuweisen: a) dadurch, dafs für die Halbsehne des betr. Punktes und die gegebene Halbsehne die in § 41, 1 ausgesprochene Beziehung abgeleitet wird, b) mittels des Pascalschen Satzes, indem noch der zu D gegengesetzte Punkt des Kegelschnittes zu Hilfe genommen wird.

11. Bewegt man eine Strecke AB der Art, dafs der eine Grenzpunkt A auf einer Geraden AC hingleitet, der andere B sich auf einem Kreis um den Punkt C bewegt, dessen Halbmesser $CB = AB$ ist, so beschreibt jeder Punkt auf der Strecke eine Ellipse. (Verlängere BA um $AD = AB$, bestimme den Weg von D und benütze Aufg. 7 b.)

[§ 41.] **12.** Rollt ein Kreis mit dem Durchmesser CA innerhalb eines festen Kreises um C mit dem Halbmesser CA, so bleibt der Grenzpunkt A des bewegten Durchmessers auf dem festen Durchmesser $2CA$ (Geradführung), und der Grenzpunkt C dieses bewegten Durchmessers bleibt auf dem zu CA senkrechten festen Durchmesser. — Jeder andere Punkt des bewegten Durchmessers beschreibt eine Ellipse (Aufg. 7 b).

---

13. Die Strecke zwischen dem Fufspunkt einer Halbsehne zu der Axe und dem auf der Axe entstehenden Schnittpunkt der zugehörigen Berührenden (Subtangente) ist in der Ellipse $= \frac{a^2 - x^2}{x}$, wenn a der halbe Durchmesser, x der Abstand der Halbsehne vom Mittelpunkt ist.

14. Es soll aus der vorangehenden Angabe abgeleitet werden, dafs die Berührende am Ende einer zur Hauptaxe senkrechten Sehne und die Berührende vom Endpunkt der zugehörigen Sehne des um die grofse Axe beschriebenen Kreises einander auf der Verlängerung dieser Axe schneiden. — Wie zeichnet man mit Hilfe dieses Kreises zu einem Ellipsenpunkt die Berührende?

15. Ist die Strecke von einem Punkt der Hauptaxe der Ellipse bis zum Mittelpunkt $= x$, ist ferner n (Subnormale) die Strecke von demselben Punkt bis zum Schnittpunkt der Geraden, welche im Endpunkt der zugehörigen Halbsehne auf dessen Berührender senkrecht steht, so ist $n : x = b^2 : a^2$.

---

16. Die Kometenbahnen sind Ellipsen mit sehr grofser Excentricität. Da sie nur in der Nähe des einen Brennpunktes (der Sonne) beobachtet werden können, so nimmt man ihre Bahnen häufig als parabolisch an. Welche Gröfse der Scheitelgleichung der Ellipse (S. 116, 5) wird damit vernachlässigt?

17. Von einer Parabel ist der Parameter p gegeben. Es soll für irgend einen Abschnitt x der Axe die Halbsehne gezeichnet werden.

18. Von einer Parabel ist der Scheitel S, die Axe g und ein Punkt P gegeben. Wie findet man den Parameter, den Brennpunkt, die Leitgerade?

19. Von einer Parabel sind zwei Punkte und die Leitgerade gegeben. Man soll den Brennpunkt finden.

20. Von einer Parabel sind zwei Punkte und die Axe gegeben. Man soll den Scheitel bestimmen. (Für die Koordinaten x, y und x_1, y_1 folgt: $x : (x_1 - x) = y^2 : \sqrt{y_1^2 - y^2}$).

21. Zur Lösung der Aufgabe: „zu einem gegebenen Würfel einen solchen von doppelter Gröfse zu bestimmen“, nehme man die Würfel-

kante s und das Doppelte $2s$ derselben als Parameter zweier Parabeln [§ 41.] mit gemeinsamem Scheitel, deren Axen zu einander senkrecht sind. In ersterer Parabel ist dann die Halbsehne des Schnittpunktes beider Parabeln die gesuchte Würfelkante.

Altar des Apollo zu Delphi; Ausspruch des Plato.

22. In einer Parabel ist die Subtangente (s. Aufg. 13) gleich dem doppelten Abschnitt der Axe. Dies soll aus dem Satz S. 109, 5b abgeleitet werden.

23. In einer Parabel ist die Subnormale gleich dem halben Parameter (s. Aufg. 15).

24. In einer Parabel ist die von der Axe begrenzte, auf der Berührenden im Berührungspunkt errichtete Senkrechte (Normale) das geometrische Mittel zwischen dem Parameter und dem Fahrstrahl.

25. In einer Parabel ist die Hälfte der von der Axe begrenzten Berührenden das geometrische Mittel zu dem Parameter und dem Axenabschnitt der zugeordneten Sehne des Berührungspunktes.

26. Von einer Parabel ist die Axe, eine Berührende und der Berührungspunkt gegeben; wie findet man den Brennpunkt und den Parameter?

27. Von einer Parabel ist die Axe, der Scheitel und eine Berührende gegeben. Wie findet man den Berührungspunkt?

28. Von einer Parabel ist ein Punkt, seine Berührende und die Richtung des Durchmessers gegeben, sowie die Gleichung für diesen Durchmesser $y^2 = \frac{2c^2}{g} \cdot x$, wobei c und g gegebene Strecken sind (siehe Anm. S. 119). Der Brennpunkt, der Scheitel, die Leitgerade sollen gefunden werden.

---

29. Welche Art von Linie ist durch die rechtwinkeligen Koordinaten x, y der Gleichung $y^2 = x^2 - a^2$ dargestellt?

30. In der Hyperbel ist die ideelle Halbaxe (s. S. 116) das geometrische Mittel der Abschnitte, in welche die Strecke zwischen beiden Brennpunkten durch einen Scheitel geteilt wird.

31. Bei der gleichseitigen Hyperbel ist der Fahrstrahl des Scheitels $= a(\sqrt{2} \pm 1)$.

32. Von allen Hyperbeln mit gemeinsamen Scheiteln schneiden einander die Berührenden der Schnittpunkte einer zur Axe senkrechten Geraden in einem Punkt der Axe. (Übereinstimmung der Subtangenten.)

33. In einer Hyperbel ist die Hälfte eines ideellen Durchmessers das geometrische Mittel zwischen den beiden Abschnitten, in welche eine mit ihm parallele Strecke zwischen den Asymptoten von einem Hyperbelast geteilt wird.

[§ 41.] **34.** Es soll aus der vorangehenden Angabe gefolgert werden, dafs mit wachsender zugeordneter Halbsehne die Hyperbel sich der Asymptote nähert.

---

35. Ist r ein Fahrstrahl, α dessen Winkel mit der Axenrichtung von dem Brennpunkt nach dem ihm zunächst liegenden Scheitel, so ist die Polargleichung a) der Ellipse $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\alpha}$,

b) der Hyperbel $r = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\alpha}$,

c) der Parabel $r = \frac{p}{2(1+\cos\alpha)} = \frac{p}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

Diese Gleichungen sollen aus S. 110, 6 abgeleitet werden; dann sollen die Werte bestimmt werden, die sich für $\alpha = 0$, $\alpha = 90^0$, $\alpha = 180^0$ u. s. w. ergeben.

36. Wie lauten die Polargleichungen der Kegelschnitte, wenn der Pol statt in den Brennpunkt in den Mittelpunkt verlegt wird?

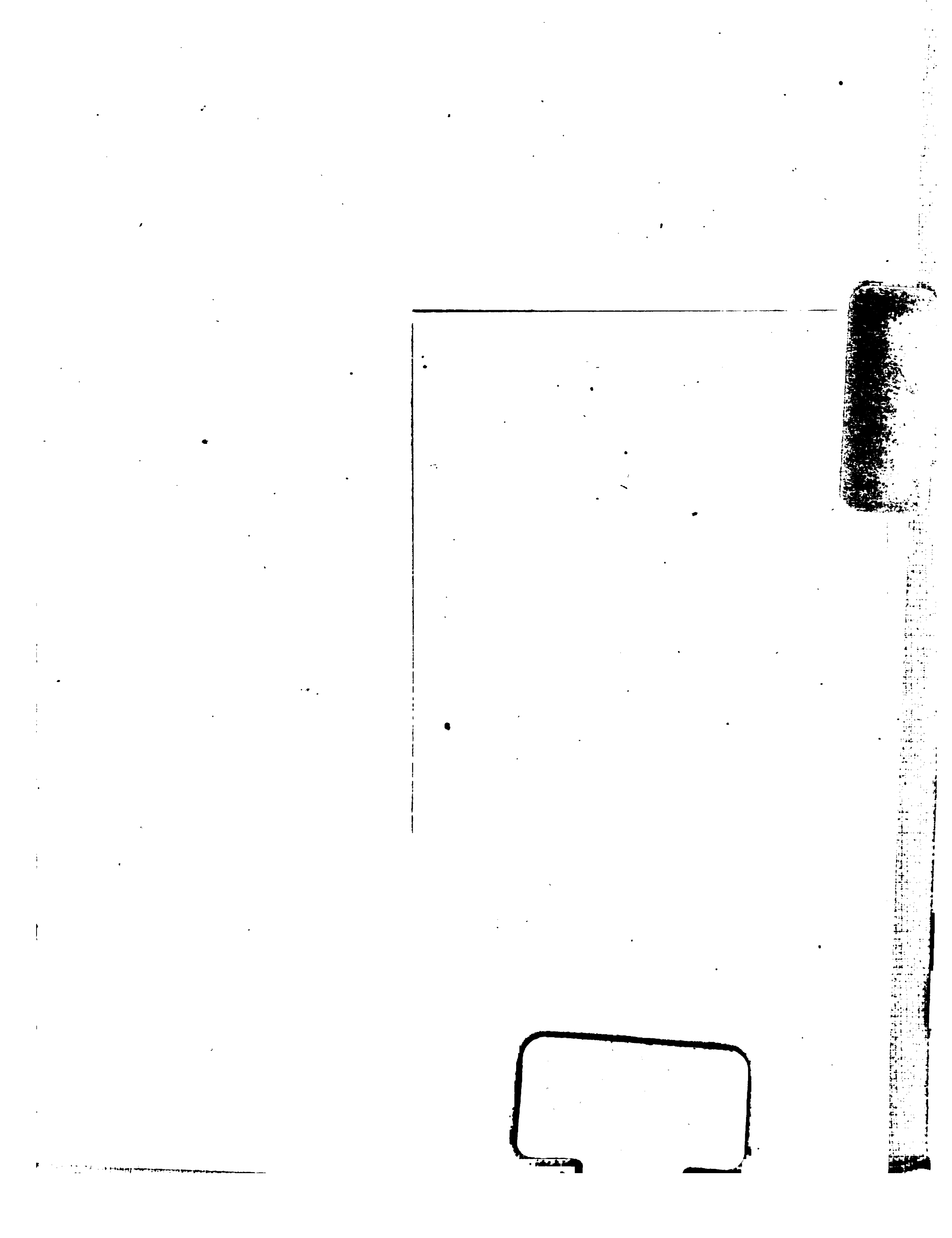
---

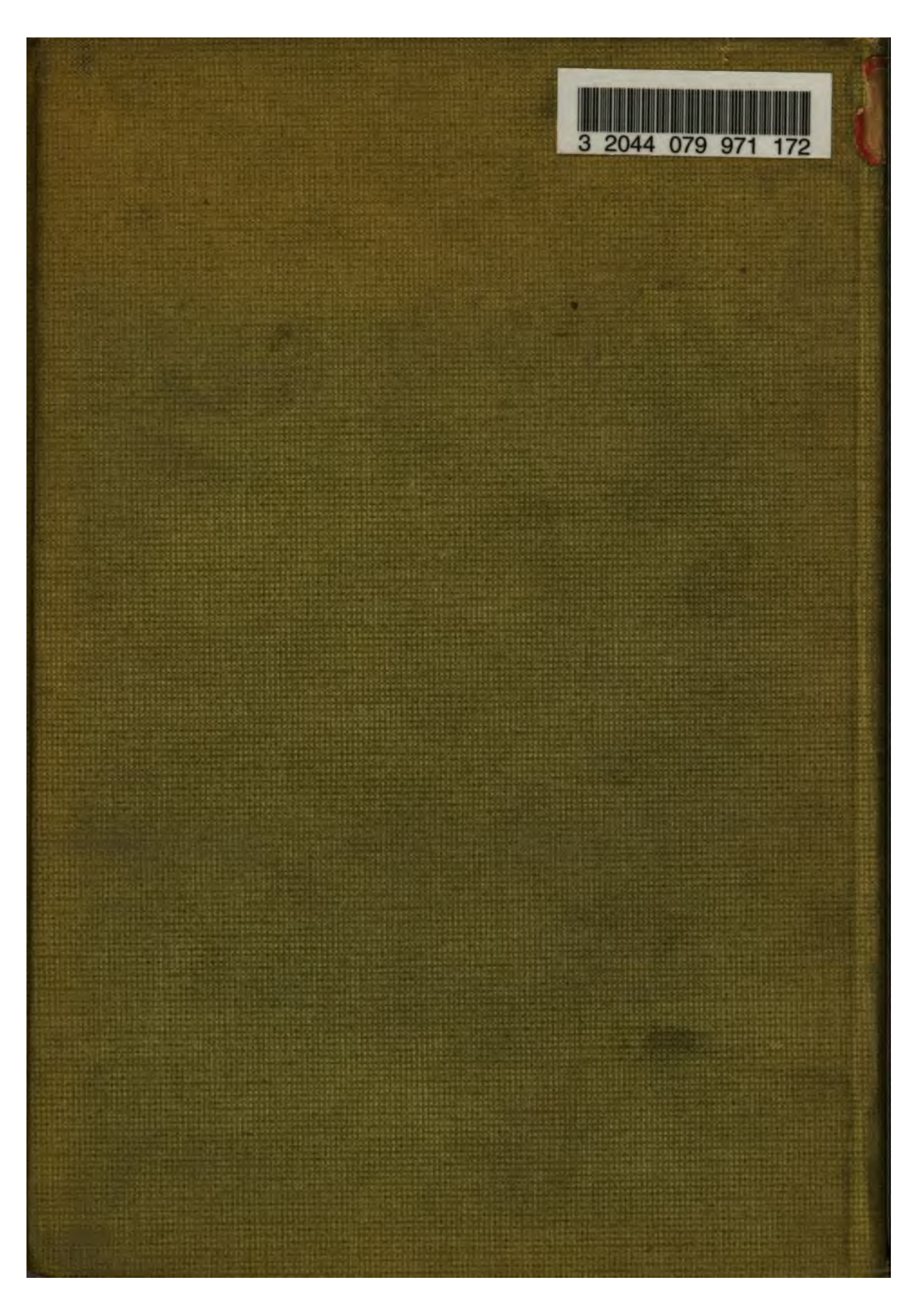
§ 41, 7. **37.** In einer Parabel ist der Winkel der Senkrechten zu der Berührenden in zwei Punkten einerseits der Axe halb so grofs als der Winkel der zugehörigen Fahrstrahlen.

38. Der Krümmungshalbmesser in einem Parabelpunkt ist viermal so grofs als der Halbmesser des Kreises, der in diesem Punkt berührt und zugleich durch den Brennpunkt geht.

39. Der Krümmungshalbmesser für den Scheitel der Parabel ist gleich dem halben Parameter.

40. Wenn man den Fahrstrahl eines Parabelpunktes in der Richtung von diesem Punkt zum Brennpunkt um seine eigene Gröfse verlängert und im Endpunkt die Senkrechte errichtet, so schneidet diese die Senkrechte zur Berührenden des Parabelpunktes im Krümmungsmittelpunkt.




3 2044 079 971 172